SIBIU 2014

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Sibiu, 8 aprilie 2014

CLASA a VII-a

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. Determinaţi numerele prime p şi q, cu $p \leq q$, pentru care are loc egalitatea:

$$p(2q+1)+q(2p+1)=2\left(p^2+q^2\right).$$

Soluţia 1. Egalitatea se scrie sub forma $p+q=2(p-q)^2$. $\quad(*)$. **2p**

Ca urmare, numerele p şi q sunt impare distincte. Pentru $p \geq 5$, numerele p şi q dau restul 1 sau 2 la împărţirea cu 3. Vom arăta că în acest caz egalitatea $(*)$ nu poate avea loc.

Dacă p şi q dau acelaşi rest la împărţirea cu 3, atunci $3 \mid 2(p-q)^2$ şi $3 \nmid p+q$, contradicţie **2p**

Dacă p şi q dau resturi diferite la împărţirea cu 3, atunci $3 \nmid 2(p-q)^2$ şi $3 \mid p+q$, din nou contradicţie **2p**

Pentru $p=3$, rezultă $q=5$ **1p**

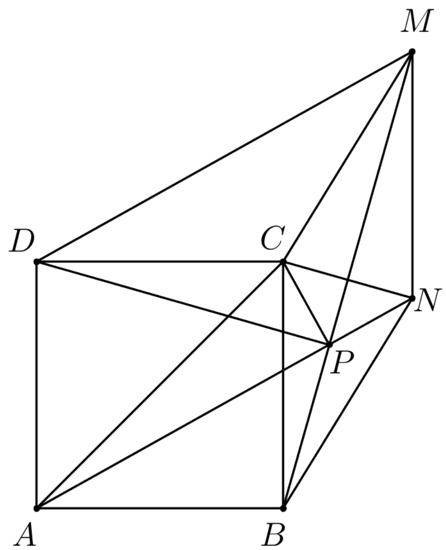
Soluţia 2. Ca mai înainte, $p+q=2(p-q)^2$, cu $p<q$ impare ... **2p**

Notând $d=q-p$, rezultă $d+2p=2d^2$, adică $2p=d(2d-1)$. Atunci $2 \mid d$, deci $d=2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, de unde $p=k(4k-1)$ şi $q=k(4k+1)$ **4p**

Numerele p şi q sunt prime atunci şi numai atunci când $k=1$, de unde $p=3$ şi $q=5$ **1p**

Problema 2. În exteriorul pătratului $ABCD$ se construieşte rombul $BCMN$. Se notează cu P punctul de intersecţie a dreptelor BM şi AN. Arătaţi că $DM \perp CP$ şi că triunghiul DPM este dreptunghic isoscel.

Soluţie.



Triunghiurile CDM şi CBM sunt isoscele, deci $\widehat{CMD} \equiv \widehat{CDM}$ şi $\widehat{CMB} \equiv \widehat{CBM}$ **1p**

Calculând suma măsurilor unghiurilor triunghiului MBD, avem:

$$\begin{aligned}180^\circ &= m(\widehat{DMB}) + m(\widehat{BDM}) + m(\widehat{DBM}) = \\ &= m(\widehat{DMB}) + 45^\circ + m(\widehat{CDM}) + 45^\circ + m(\widehat{CBM}) = 90^\circ + 2m(\widehat{DMB}),\end{aligned}$$

de unde $m(\widehat{DMB}) = 45^\circ$ **2p**

Deoarece $ADMN$ este paralelogram, avem $DM \parallel AN$, de unde rezultă $m(\widehat{MPN}) = m(\widehat{DMB}) = 45^\circ$ **1p**

Întrucât P se află pe mediatoarea segmentului $[CN]$, rezultă $\widehat{MPN} \equiv \widehat{MPC}$, deci $m(\widehat{NPC}) = 90^\circ$, adică $CP \perp AN$, de unde $CP \perp DM$ **1p**

Deoarece triunghiul CDM este isoscel, rezultă că perpendiculara din C pe DM, adică dreapta CP, este mediatoarea segmentului $[DM]$. Ca urmare, triunghiul DPM este isoscel de bază $[DM]$. Cum $m(\widehat{DMP}) = 45^\circ$, rezultă că $m(\widehat{DPM}) = 90^\circ$ **2p**

Problema 3. Determinaţi numerele naturale n pentru care are loc egalitatea:

$$17^n + 9^{n^2} = 23^n + 3^{n^2}.$$

Soluţia 1. Se observă că $n = 0$ şi $n = 1$ sunt soluţii **1p**

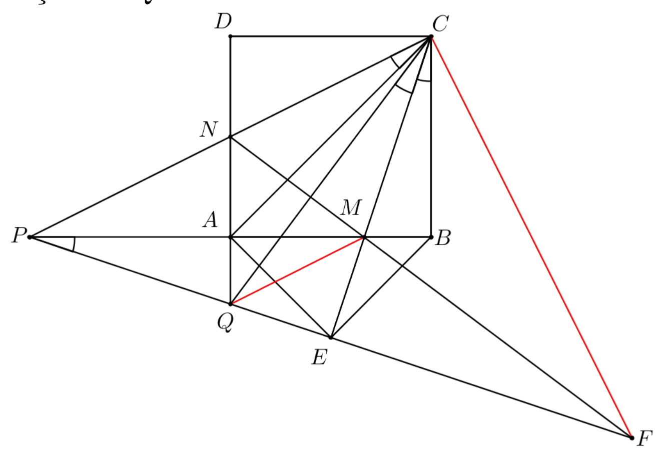
Pentru $n \geq 2$, avem $n^2 \geq 2n$, de unde rezultă că
$9^{n^2} - 3^{n^2} = 3^{n^2}\left(3^{n^2} - 1\right) \geq 3^{2n}\left(3^{2n} - 1\right) = 81^n - 9^n$ **4p**
Deoarece $81^n - 9^n > 23^n - 17^n$, ecuaţia nu are soluţii $n \geq 2$ **2p**

Soluţia 2. Se observă că $n = 0$ şi $n = 1$ sunt soluţii **1p**
Pentru $n \geq 2$, scriind ecuaţia sub forma $23^n - 17^n = 9^{n^2} - 3^{n^2}$, rezultă $A = B$, unde
$A = 23^{n-1} + 17 \cdot 23^{n-1} + 17^2 \cdot 23^{n-2} + ... + 17^{n-2} \cdot 23 + 17^{n-1}$
$B = 9^{n^2-1} + 9^{n^2-2} \cdot 3 + 9^{n^2-3} \cdot 3^2 + ... + 9 \cdot 3^{n^2-2} + 3^{n^2-1}$ **2p**
Suma A conţine n termeni, deci $A < n \cdot 23^{n-1}$, iar suma B conţine n^2 termeni, deci $B > n^2 \cdot 3^{n^2-1}$ **2p**
Deoarece $n^2 - 1 = (n+1)(n-1) \geq 3(n-1)$, pentru orice $n \geq 2$, rezultă că

$$B > n^2 \cdot 3^{n^2-1} \geq n^2 \cdot 3^{3(n-1)} = n^2 \cdot 27^{n-1} > n \cdot 23^{n-1} = A,$$

deci ecuaţia nu are soluţii naturale $n \geq 2$ **2p**

Problema 4. În exteriorul pătratului $ABCD$ se construieşte triunghiul dreptunghic isoscel ABE, cu ipotenuza $[AB]$. Fie N mijlocul laturii $[AD]$ şi $\{M\} = CE \cap AB$, $\{P\} = CN \cap AB$, $\{F\} = PE \cap MN$. Pe dreapta FP se consideră punctul Q astfel încât $[CE$ este bisectoarea unghiului QCB. Arătaţi că $MQ \perp CF$.



Soluţie. $\triangle APE \equiv \triangle BCE$ (L.U.L.), de unde $CE = PE$ şi $\widehat{BEC} \equiv \widehat{AEP}$. Cum $m(\widehat{BEC}) + m(\widehat{AEC}) = 90°$, rezultă $m(\widehat{AEC}) + m(\widehat{AEP}) = 90°$, adică $m(\widehat{CEP}) = 90°$ **(1).** Obţinem că triunghiul ECP este dreptunghic şi isoscel, adică $m(\widehat{CPE}) = 45°$ **(2)** **2p**

De asemenea, $\triangle CEQ \equiv \triangle PEM$ (C.U.), adică $EQ = EM$, deci $\triangle EMQ$ este dreptunghic şi isoscel. Obţinem $m(\widehat{EQM}) = 45° = m(\widehat{EPC})$, de unde rezultă că $MQ \parallel CP$ **(3)** **1p**

Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul CPE cu transversala NF avem $\frac{CN}{NP} \cdot \frac{FP}{FE} \cdot \frac{ME}{MC} = 1$ **1p**

Notând cu R piciorul perpendicularei din E pe AB, atunci $\triangle CBM \sim \triangle ERM$, de unde obţinem $\frac{ME}{MC} = \frac{ER}{BC} = \frac{1}{2}$ **1p**

Deoarece $NP = CN$, rezultă $\frac{FP}{FE} = 2$, deci $PE = EF$, şi conform (1), CE este înălţime şi mediană în triunghiul CFP, adică acesta este isoscel. Folosind (2), rezultă $m(\widehat{FCP}) = 90°$, adică $CP \perp CF$, de unde, ţinând cont de (3), obţinem $MQ \perp CF$ **2p**