Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa III - 24 aprilie 2021

Soluţii şi bareme – clasa a IX-a

Problema 1. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC. Fie O centrul cercului circumscris acestuia și D piciorul înălțimii din A. Știind că $OD \parallel AB$, arătaţi că $\sin 2B = \mathrm{ctg} C$.

Soluţie.

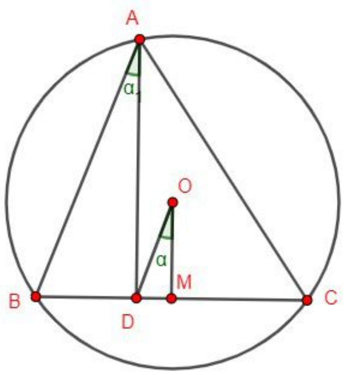

Figura 1

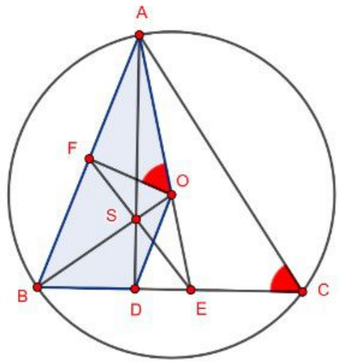

Figura 2

Avem (Figura 1) $\mathrm{tg}\angle DOM = \mathrm{tg}\angle BAD = \mathrm{ctg}B$. Dar

$$DM = BM - BD = a/2 - c\cos B = R\sin A - 2R\sin C\cos B,$$

iar $OM = R\cos A$, deci

$$\frac{\sin A - 2\sin C\cos B}{\cos A} = \frac{\cos B}{\sin B}.$$

.... 4p

Eliminând numitorii și transformând produsele în sume, ajungem la

$$\cos(2B + C) - \cos(2B - C) = -2\cos C,$$

sau

$$-2\sin 2B\sin C = -2\cos C \Leftrightarrow \sin 2B = \mathrm{ctg}C.$$

.... 3p

Soluţie alternativă. Din ipoteză, $ABDO$ este trapez (Figura 2). Se ştie că dreapta care trece prin punctul de intersecţie a diagonalelor (punctul S) şi prin punctul de intersecţie a laturilor neparalele (punctul E) trece prin mijloacele bazelor, aşadar F este mijlocul lui AB. Deducem că $OF \perp AB$ şi cum triunghiul AOB este isoscel, obţinem şi $\angle AOF = C$. 3p

Egalitatea $\sin 2B = \mathrm{ctg}C$, sau $2\sin B\cos B = \mathrm{ctg}C$ se scrie echivalent

$$2\cdot\frac{AD}{AB}\cdot\frac{BD}{AB} = \frac{OF}{AF} \Leftrightarrow \frac{AD}{AB}\cdot\frac{BD}{AB} = \frac{OF}{AB} \Leftrightarrow AD\cdot BD = OF\cdot AB,$$

.... 2p

relaţie care exprimă egalitatea ariilor triunghiurilor ABD şi AOB şi este evidentă deoarece $ABDO$ este trapez. 2p

Problema 2. Fie $P_0, P_1, \ldots, P_{2021}$ puncte pe cercul trigonometric, de centru O şi rază 1, astfel încât, pentru orice $n \in \{1, 2, \ldots, 2021\}$, lungimea arcului de cerc parcurs în sens trigonometric de la P_{n-1} la P_n

aparţine intervalului $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
Aflaţi lungimea maximă a vectorului

$$\overrightarrow{OP}_0 + \overrightarrow{OP}_1 + \cdots + \overrightarrow{OP}_{2021}.$$

Soluţie. Vom arăta că $|\overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}| \leq 1$.

Fie $\alpha = m(\angle P_0OP_1)$ şi $\beta = m(\angle P_1OP_2)$. Avem $m(\angle P_2OP_0) = 2\pi - \alpha - \beta$ şi

$$\begin{aligned}
& \left|\overrightarrow{OP}_0 + \overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP}_2\right|^2 = \left(\overrightarrow{OP}_0 + \overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP}_2\right) \cdot \left(\overrightarrow{OP}_0 + \overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP}_2\right) \\
= \;& 3 + 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos(2\pi - \alpha - \beta)) \\
= \;& 1 + 2(\cos\alpha + \cos\beta + 1 + \cos(\alpha + \beta)) \\
= \;& 1 + 8\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2},
\end{aligned}$$

deci

$$\left|\overrightarrow{OP}_0 + \overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP}_2\right| \leq 1 \Leftrightarrow \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} \leq 0,$$

ceea ce este adevărat, pentru că $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ şi $\frac{\alpha+\beta}{2} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.......................................3p

Analog se arată că $\left|\overrightarrow{OP}_{3k} + \overrightarrow{OP}_{3k+1} + \overrightarrow{OP}_{3k+2}\right| \leq 1$, pentru orice k, $0 \leq k \leq 673$.
Aşadar,

$$\left|\sum_{n=0}^{2021} \overrightarrow{OP}_n\right| \leq \sum_{k=0}^{673} \left|\overrightarrow{OP}_{3k} + \overrightarrow{OP}_{3k+1} + \overrightarrow{OP}_{3k+2}\right| \leq 674.$$

....2p

Putem obţine egalitatea luând, de exemplu, P_0, P_1, P_2 puncte pe cerc astfel încât arcele de cerc parcurse în sens trigonometric P_0P_1 şi P_1P_2 să aibă măsura $\frac{\pi}{2}$, apoi

$$P_n = \begin{cases} P_0, & n = 3k, k \in \{1, \ldots, 673\} \\ P_1, & n = 3k+1, k \in \{1, \ldots, 673\} \\ P_2, & n = 3k+2, k \in \{1, \ldots, 673\}. \end{cases}$$

....2p

Problema 3. Fie a, b, c numere strict pozitive, astfel încât $a + b + c = 1$. Arătaţi că

$$\frac{1}{abc} + \frac{4}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{13}{ab + bc + ca}.$$

Soluţie. Inegalitatea este echivalentă cu

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{4(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 13,$$

sau

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{4(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 13.$$

....1p

Să observăm că

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 3 + \sum \frac{a^2 + b^2}{ab} = 9 + \sum \frac{(a - b)^2}{ab}.$$

....2p

Avem însă

$$\frac{(a - b)^2}{ab} \geq \frac{2(a - b)^2}{a^2 + b^2} \geq \frac{2(a - b)^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

....2p aşadar

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9+\frac{2\sum(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2} = 9+\frac{4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)}{a^2+b^2+c^2} = 13-\frac{4(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2},$$

de unde concluzia. 2p

Problema 4. Fie A o mulţime finită de numere naturale. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{N} \to A$ cu proprietatea că $f(|x-y|) = |f(x) - f(y)|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$.

Soluţie.

Pentru $x = y$, rezultă $f(0) = 0$, deci dacă $0 \notin A$, nu există astfel de funcţii. 1p

Considerăm în continuare $0 \in A$.

Fie $a \in \mathbb{N}^*$. Vom arăta că $f(2a) = 0$.

Numerele din şirul $f(a), f(2a), ..., f(na), ...$ aparţin lui A, care e finită, deci există $1 \leq i < j$ astfel ca $f(ia) = f(ja)$. Pentru $x = ia, y = ja$, rezultă $f((j-i)a) = 0$.

Deci există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $f(ka) = 0$. Alegem $k \in \mathbb{N}^*$ minim cu această proprietate.

Dacă $k \geq 3$, atunci luăm $x = ka, y = a$ şi obţinem $f((k-1)a) = f(a)$. Apoi, pentru $x = (k-1)a, y = a$, găsim că $f((k-2)a) = 0$, ceea ce contrazice minimalitatea lui k.

Deci $k \leq 2$, adică $f(a) = 0$ sau $f(2a) = 0$. Să presupunem că $f(2a) \neq 0$. Atunci $f(a) = 0$. Pentru $x = 2a, y = a$, obţinem că $f(a) = |f(2a) - f(a)| \Leftrightarrow f(2a) = 0$, contradicţie.

Deci $f(2a) = 0$. Cum $a \in \mathbb{N}^*$ a fost ales arbitrar, rezultă că $f(n) = 0$ pentru orice număr par n. 4p

Fie acum x, y impare. Desigur, $|x-y|$ este par, deci $f(|x-y|) = 0$. Rezultă că $|f(x) - f(y)| = 0$, aşadar $f(x) = f(y)$ pentru orice x, y impare.

Găsim că

$$f(n) = \begin{cases} c, & \text{dacă } x \text{ este impar} \\ 0, & \text{dacă } x \text{ este par} \end{cases},$$

pentru $c \in A$, arbitrar. 1p

Toate aceste funcţii verifică condiţia din enunţ. 1p