Olimpiada Națională de Matematică 2026

Etapa locală - Iași, 30 ianuarie 2026

Clasa a XI-a

Barem de notare și evaluare

Problema 1 (22 de puncte)

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Calculați:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{100n^2+19n+1}\right\}$;

b) $L = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}\left(1+\frac{5}{1\cdot 3}\right)\left(1+\frac{7}{2\cdot 4}\right)\left(1+\frac{9}{3\cdot 5}\right)...\left(1+\frac{2n+3}{n(n+2)}\right)$.

Soluție

a) $10n < \sqrt{100n^2+19n+1} < 10n+1 \Rightarrow \left[\sqrt{100n^2+19n+1}\right] = 10n$ 4p

$$\left\{\sqrt{100n^2+19n+1}\right\} = \sqrt{100n^2+19n+1} - 10n = \frac{100n^2+19n+1-100n^2}{\sqrt{100n^2+19n+1}+10n}$$

$$= \frac{19n+1}{\sqrt{n^2\left(100+\frac{19}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+10n} = \frac{19+\frac{1}{n}}{\sqrt{100+\frac{19}{n}+\frac{1}{n^2}}+10}.$$ 7p

$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{100n^2+19n+1}\right\} = \frac{19}{20}$ 3p

b) $1+\frac{2k+3}{k(k+2)} = \frac{k^2+4k+3}{k(k+2)} = \frac{(k+1)(k+3)}{k(k+2)}$ 3p

Deci

$$\frac{3}{n^2}\left(1+\frac{5}{1\cdot 3}\right)\left(1+\frac{7}{2\cdot 4}\right)\left(1+\frac{9}{3\cdot 5}\right)...\left(1+\frac{2n+3}{n(n+2)}\right) = \frac{3}{n^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\frac{4\cdot 6}{3\cdot 5}\cdot...\cdot\frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)} = \frac{(n+1)(n+3)}{n^2}$$

$L = 1$ 5p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Problema 2 (22 de puncte)

a) Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det\left(A^2+7\cdot I_2\right)=0$. Calculați $\det\left(A^2-3A+7\cdot I_2\right)$.

b) Fie $A,B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $BA^4=I_2+B$. Arătați că $AB=BA$.

Soluție.

a) $\det\left(A^2+7\cdot I_2\right)=0 \Rightarrow \det\left(A+i\sqrt{7}\cdot I_2\right)\det\left(A-i\sqrt{7}\cdot I_2\right)=0$ ……………………………………4p

Fie $d=\det A, t=\operatorname{Tr} A$.

Deoarece $\det\left(A-i\sqrt{7}\cdot I_2\right)=d-i\sqrt{7}t-7=0 \Rightarrow d=7, t=0$ …………………………..………...…..7p

Din ecuatia Cayley- Hamilton avem $A^2-(\operatorname{Tr} A)\cdot A+(\det A)\cdot I_2=O_2 \Rightarrow A^2+7I_2=O_2$

Atunci $\det\left(A^2-3A+7I_2\right)=\det(-3A)=63$ ……………………………...………..............................3p

b) Concluzia rămâne adevărată pentru orice matrice $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu $BA^4=I_n+B$.

Avem $B\left(A^4-I_n\right)=I_n \Rightarrow B^{-1}=A^4-I_n$ (1) …………………..…………………………………......…3p

Din $BA^4=I_n+B$ mai obținem $BA^5=A+BA$ și $ABA^4=A+AB$, de unde obținem că $BA^5-ABA^4=BA-AB \Rightarrow (BA-AB)\left(A^4-I_n\right)=O_n$

Folosind relația (1) se obține că $(BA-AB)B^{-1}=O_n \Rightarrow BA-AB=O_n \Rightarrow AB=BA$ …………….…5p

Problema 3 (23 de puncte)

Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $x_1=-2, x_{n+1}=x_n+\dfrac{2026}{x_n}, \forall n\geq 1$. Calculați:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{n}}$.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Soluție.

a) Observăm că $(x_n)_{n\geq 1} \subset (-\infty, 0)$……………………………………………..……………3p

Cum $x_{n+1} - x_n < 0$, obținem că $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător...3p

Presupunem că $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit inferior, deci este convergent. Trecând la limită în relația de recurență, nu avem soluție, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ 4p

b) Fie șirul $y_n = \left(\dfrac{x_n}{\sqrt{n}}\right)^2 = \dfrac{{x_n}^2}{n}$ 3p

Aplicând criteriul Stolz-Cesaro, avem $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(4052 + \dfrac{2026}{{x_n}^2}\right) = 4052$ 7p

Obținem că $\lim\limits_{n\to\infty} -\sqrt{y_n} = -\sqrt{4052}$ 3p

Problema 4 (23 de puncte)

Arătați că pentru orice matrice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu $\det(A-B) \neq 0$ este verificată egalitatea $A(A-B)^{-1}B = B(A-B)^{-1}A$.

V. Pop

Soluție.

Dacă A, B sunt inversabile, atunci $A(A-B)^{-1}B = \left(B^{-1}(A-B)A^{-1}\right)^{-1} = \left(B^{-1}-A^{-1}\right)^{-1}$ ………….....….3p

Iar $B(A-B)^{-1}A = \left(A^{-1}(A-B)B^{-1}\right)^{-1} = \left(B^{-1}-A^{-1}\right)^{-1}$, de unde rezultă concluzia……………….……6p

Dacă A sau B sunt neinversbile

considerăm $A_\alpha = A - \alpha I_n, B_\alpha = B - \alpha I_n$, deci $A_\alpha - B_\alpha = A - B$ ………………………………………....3p

Ecuațiile $\det A_\alpha = 0$ și $\det B_\alpha = 0$ au număr finit de rădăcini, deci există un interval $(0, a)$ astfel încât $\det A_\alpha \neq 0$ și $\det B_\alpha \neq 0$, deci A_α, B_α sunt inversabile……………………………………………………4p

Din primul caz, avem că $A_\alpha (A-B)^{-1} B_\alpha = B_\alpha (A-B)^{-1} A_\alpha, \forall \alpha \in (0, a)$ ……………….………………4p

Trecând la limită cu $\alpha \to 0$, obținem concluzia……………………………………………………….…..3p

Se acordă 10 puncte din oficiu.
Orice altă variantă corectă de rezolvare se punctează corespunzător.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro