4. Fie $ABCD$ un pătrat şi $(BE$ bisectoarea unghiului $\angle ABD$, $E \in AD$. Dreptele BE şi AC se taie în M, iar perpendiculara în M pe BE taie dreptele CD şi BD în F şi T.

a) Să se arate că triunghiul DET este isoscel.

b) Să se arate că $EF \parallel AC$.

c) Să se arate că $ET \perp BF$.

prof. Mircea Fianu

Soluție. a) M este centrul cercului înscris în ΔABD. Rezultă $\Delta DME \equiv \Delta DMT$ **3p**

b) $m(\angle DTF) = 90° - \frac{1}{2}45°, m(\angle TDF) = 45° \Rightarrow DT = DF = DE \Rightarrow m(\angle DEF) = 45°$ **2p**

c) T este ortocentrul triunghiului BEF **2p**

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ, 27 IANUARIE 2008

CLASA A 8 - A

1. Să se afle toate perechile de numere naturale $(a,b), b \neq 0$, ştiind că $a+b=2007$ şi că restul împărțirii lui a la b este egal cu câtul acestei împărțiri.

prof. Dorela Făinişi

Soluție.

$a = bc + c,\ 0 \le c < b$ **3p**

Rezultă $(b+1)(c+1) = 2008$ **2p**

$2008 = 2^3 \cdot 251$,

$c = 1 \Rightarrow b = 1003, a = 1004;\ c = 3 \Rightarrow b = 501, a = 1506;\ c = 7 \Rightarrow b = 250, a = 1757$ **2p**

2. Considerăm inegalitatea $\sqrt{(a+b)(c+d)} > \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$, unde a,b,c,d sunt numere reale pozitive distincte.

a) Să se arate că, dacă $a < c < b < d$, atunci inegalitatea este adevărată.

b) Este inegalitatea adevărată pentru orice a,b,c,d ?

***

Soluție. a) Ridicând la pătrat şi grupând, obținem $(d-a)(b-c) + (\sqrt{ad} - \sqrt{bc})^2 > 0$ **5p**

b) Inegalitatea este falsă, de exemplu, pentru $a = 36, b = 64, c = 9, d = 16$ **2p**

3. Se consideră în plan un sistem de coordonate şi punctele $A(1,3)$, $B(3,5)$, $C(4,2)$, $V_1(0,6)$, $V_2(2,0)$, $V_3(6,4)$.

a) Să se verifice că triunghiul ABC este isoscel.

b) Să se arate că există în spațiu un punct V astfel încât reuniunea triunghiurilor V_1AB, V_2AC, V_3BC, ABC să reprezinte desfăşurarea tetraedrului $VABC$.

c) Să se determine distanța de la V la planul (ABC), unde V este punctul definit la b).

prof. Consuela Voica

Soluție. a)

$AC = BC = \sqrt{10}$ **1p**

b)

$V_1B = V_3B = \sqrt{10}, V_2C = V_3C = \sqrt{8}, V_1A = V_2A = \sqrt{10}$ **3p**

c) Dacă M este mijlocul segmentului (AB), distanța cerută este înălțime în ΔCMV **2p**

Triunghiul este echilateral şi finalizare...**1p**

4. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ şi punctele M, N, P, Q pe fețele $ABCD, BCC'B', A'B'C'D'$, respectiv $ADD'A'$, astfel încât triunghiurile $ABM, B'C'N, C'D'P, ADQ$ să fie echilaterale.

a) Să se arate că punctele M, N, P, Q sunt coplanare.

b) Să se arate că $MNPQ$ este dreptunghi, dar nu este pătrat.

c) Să se arate că dreptele MP şi NQ fac cu dreapta AA' unghiuri complementare.

prof. Petre Simion, prof. Victor Nicolae

Soluție. a) MP şi NQ trec prin centrul O al cubului, deci au un punct comun **2p**

b) $OM = ON = OP = OQ \Rightarrow$ dreptunghi, dar $MN \neq NP$ **3p**

c) Dacă $PP' \perp (ABC), NN' \perp (ADD')$, atunci $\Delta PP'M \equiv \Delta NN'Q$ şi concluzia..........................**2p**