

INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, 27 IANUARIE 2008

CLASA A 8 - A

1. Să se afle toate perechile de numere naturale $(a, b), b \neq 0$, știind că $a + b = 2007$ și că restul împărțirii lui a la b este egal cu câtul acestei împărțiri.

2. Considerăm inegalitatea $\sqrt{(a+b)(c+d)} > \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$, unde a, b, c, d sunt numere reale pozitive distincte.

- Să se arate că, dacă $a < c < b < d$, atunci inegalitatea este adevărată.
- Este inegalitatea adevărată pentru orice a, b, c, d ?

3. Se consideră în plan un sistem de coordonate și punctele $A(1,3)$, $B(3,5)$, $C(4,2)$, $V_1(0,6)$, $V_2(2,0)$, $V_3(6,4)$.

- Să se verifice că triunghiul ABC este isoscel.
- Să se arate că există în spațiu un punct V astfel încât reuniunea triunghiurilor V_1AB , V_2AC , V_3BC , ABC să reprezinte desfășurarea tetraedrului $VABC$.
- Să se determine distanța de la V la planul (ABC) , unde V este punctul definit la b).

4. Fie cubul $ABCD A' B' C' D'$ și punctele M, N, P, Q pe fețele $ABCD, BCC' B', A' B' C' D'$, respectiv $ADD' A'$, astfel încât triunghiurile $ABM, B' C' N, C' D' P, ADQ$ să fie echilaterale.

- Să se arate că punctele M, N, P, Q sunt coplanare.
- Să se arate că $MNPQ$ este dreptunghi, dar nu este pătrat.
- Să se arate că dreptele MP și NQ fac cu dreapta AA' unghiuri complementare.

*Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Timp de lucru: 3 ore*