INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ, 27 IANUARIE 2008

CLASA A 7-A

1. a) Să se arate că nu există niciun număr rațional r care să verifice egalitatea

$$(|r|-\sqrt{3})(r+1,73)=1.$$

b) Să se determine cel mai mic număr real r care să verifice egalitatea

$$(|r|-\sqrt{3})(r+1,73)=0.$$

Soluție. a) Nu se poate ca $r+1,73=0$, iar dacă $r\in \mathbf{Q}\setminus\{-1,73\}$, atunci $\sqrt{3}=|r|-\dfrac{1}{r+1,73}\in \mathbf{Q}$ ..**3p**

b) Egalitatea este verificată de $-1,73; -\sqrt{3}; \sqrt{3}$. Cel mai mic este $-\sqrt{3}$ **4p**

2. Vom spune că un an este „*magic*” pentru o persoană dacă numărul anului este divizibil cu vârsta care urmează să o împlinească persoana în cursul lui. Există două persoane născute în secolul XXI care, oricât ar trăi, nu pot avea nici un an magic comun ? Justificați răspunsul.

prof. Petre Simion

Soluție. Dacă persoana se naşte în anul a, atunci anii magici sunt de forma $a+n$, cu $n\,|\,a$ ...**4p**

Deoarece 2003 este prim, o persoană născută în acest an are ca ani magici 2004 şi 4006. Dacă a doua persoană este născută, de exemplu, în 2005, atunci ea nu are aceşti ani magici..................................**3p**

3. În triunghiul isoscel ABC, cu $AB=AC$, se consideră punctele E şi F pe latura (BC), astfel încât $BE=EF=FC$ şi $E\in(BF)$. Fie $D\in(AB)$ astfel încât $BD=2AD$ şi G intersecția dreptei DF cu înălțimea AA' a triunghiului ABC, $A'\in(BC)$.

a) Să se arate că patrulaterul $ADEG$ este paralelogram.

b) Să se arate că patrulaterul $ADEG$ este romb dacă şi numai dacă $m(\angle BAC)=120°$.

prof. Elefterie Petrescu

Soluție. a) $\dfrac{BD}{DA}=2=\dfrac{BE}{EA'}\Rightarrow DE\parallel AG$ **1p**

Analog, $DF\parallel AC$. Prin simetrie fața de AA', rezultă $EG\parallel AB$ **2p**

b) Dacă $m(\angle BAC)=60°$, atunci $3AD=AB=2AA'=3AG$. **2p**

Pentru reciprocă, rezultă $m(\angle BAC)=4m(\angle BAE)$, iar $AE\perp DF\parallel AC\Rightarrow m(\angle BAE)=30°$. **2p**

4. Fie $ABCD$ un pătrat şi $(BE$ bisectoarea unghiului $\angle ABD$, $E \in AD$. Dreptele BE şi AC se taie în M, iar perpendiculara în M pe BE taie dreptele CD şi BD în F şi T.

a) Să se arate că triunghiul DET este isoscel.

b) Să se arate că $EF \parallel AC$.

c) Să se arate că $ET \perp BF$.

prof. Mircea Fianu

Soluție. a) M este centrul cercului înscris în ΔABD. Rezultă $\Delta DME \equiv \Delta DMT$ **3p**

b) $m(\angle DTF) = 90° - \frac{1}{2}45°, m(\angle TDF) = 45° \Rightarrow DT = DF = DE \Rightarrow m(\angle DEF) = 45°$ **2p**

c) T este ortocentrul triunghiului BEF **2p**

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ, 27 IANUARIE 2008

CLASA A 8 - A

1. Să se afle toate perechile de numere naturale $(a, b), b \neq 0$, ştiind că $a + b = 2007$ şi că restul împărțirii lui a la b este egal cu câtul acestei împărțiri.

prof. Dorela Făinişi

Soluție.

$a = bc + c,\ 0 \le c < b$ **3p**

Rezultă $(b+1)(c+1) = 2008$ **2p**

$2008 = 2^3 \cdot 251$,

$c = 1 \Rightarrow b = 1003, a = 1004;\ c = 3 \Rightarrow b = 501, a = 1506;\ c = 7 \Rightarrow b = 250, a = 1757$ **2p**

2. Considerăm inegalitatea $\sqrt{(a+b)(c+d)} > \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$, unde a, b, c, d sunt numere reale pozitive distincte.

a) Să se arate că, dacă $a < c < b < d$, atunci inegalitatea este adevărată.

b) Este inegalitatea adevărată pentru orice a, b, c, d ?

***

Soluție. a) Ridicând la pătrat şi grupând, obținem $(d-a)(b-c) + (\sqrt{ad} - \sqrt{bc})^2 > 0$ **5p**

b) Inegalitatea este falsă, de exemplu, pentru $a = 36, b = 64, c = 9, d = 16$ **2p**

3. Se consideră în plan un sistem de coordonate şi punctele $A(1,3)$, $B(3,5)$, $C(4,2)$, $V_1(0,6)$, $V_2(2,0)$, $V_3(6,4)$.

a) Să se verifice că triunghiul ABC este isoscel.