

INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ, FAZA LOCALĂ, 27 IANUARIE 2008
CLASA A 6 - A

1. Să se determine numerele naturale nenule a, b știind că suma lor este 74 și, împărțind pe a la b , se obține un cât egal cu restul împărțirii.

Dorela Făiniși

Soluție. Avem $a = bc + c, 0 \leq c < b$ 2p

Rezultă $b + c + bc = 74$. Dacă $c \geq 8$, atunci $b + c + bc \geq 9 + 8 + 72 > 74$, ceea ce nu convine....2p

Pentru $c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, prin încercări: $a = 0, b = 74$; $a = 50, b = 24$; $a = 60, b = 14$ 3p

2. Se consideră mulțimile

$$A = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}, x \leq 11\}, B = \{y \mid y = 2k + 1, k \in \mathbb{N}, y < 15\}, C = \left\{z \mid z = \frac{x + y + 1}{3}, x \in A, y \in B\right\}$$

a) Să se determine cardinalul mulțimilor A, B, C .

b) Să se determine $N \cap C$.

c) Să se decidă dacă mulțimile $(A \cup B) \times B$ și $(A \times B) \cup (B \times B)$ au același cardinal.

Viorel Chinan

Soluție. a) Inecuația $2k < 11$ are 6 soluții, inecuația $2k + 1 < 15$ are 7 soluții.....2p

Mulțimea C este $\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{6}{3}, \frac{8}{3}, \dots, \frac{24}{3}\right\}$ și are 12 elemente.....2p

b) $N \cap C = \{2, 4, 6, 8\}$ 1p

c) $(A \cup B) \times B$ are $13 \cdot 7 = 91$ elemente, iar $(A \times B) \cup (B \times B)$ are $6 \cdot 7 + 7 \cdot 7 = 91$ 2p

3. Se consideră numărul $M = 7^{2008} + 4$.

a) Să se determine ultima cifră a numărului M .

b) Să se arate că M nu este un pătrat perfect.

Daniela Chiteș

Soluție. a) Ultima cifră a lui 7^4 este 1, deci ultima cifră a numărului este 1.....4p

b) $7^{2008} = (7^{1004})^2$ este pătrat perfect, iar următorul pătrat perfect este $(7^{1004} + 1)^2 > 7^{2008} + 4$..3p

4. Se dau unghiurile $\angle A_1OA_2, \angle A_2OA_3, \dots, \angle A_{12}OA_{13}$, astfel încât oricare două nu au puncte interioare comune. Semidreptele (OA_1) și (OA_{13}) sunt opuse, iar măsurile acestor 12 unghiuri sunt numere naturale pare consecutive.

a) Aflați măsurile unghiurilor.

b) Există două dintre cele 12 bisectoare ale unghiurilor care să aibe drepte suport perpendiculare ?

Petre Simion

Soluție. a) Dacă x este măsura celui mai mic unghi, $12x + 132 = 180 \Rightarrow x = 4$ 3p

Unghiurile sunt de măsuri $4^\circ, 6^\circ, 8^\circ, \dots, 26^\circ$ 1p

b) Dacă unghiurile sunt așezate „în ordine”, nu există.....3p