INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ, 27 IANUARIE 2008

CLASA A 5-A

1. a) Să se calculeze

$$52\cdot 51-51\cdot 50+50\cdot 49-49\cdot 48.$$

b) Se consideră numărul

$$n=100\cdot 99-99\cdot 98+98\cdot 97-97\cdot 96+...+4\cdot 3-3\cdot 2+2\cdot 1.$$

Să se arate că numărul $2n$ este pătrat perfect.

Soluție. a) Numărul este $51\cdot 2+49\cdot 2=200$ ....**3 p**

b) $n=2\cdot 99+2\cdot 97+2\cdot 95+...+2\cdot 3+2\cdot 1$ ....**2 p**

$=2(99+97+...+3+1)=100\cdot 50$ ....**1 p**

$2n=100^2$ ....**1 p**

2. a) Să se verifice că $(2^3)^2<3^{2^2}<2^{3^2}$.

b) Fie numerele naturale $a,b\geq 2$. Să se arate că numărul $2^{2^a}+2^{2^b}$ nu este pătrat perfect.

Soluție. a) $(2^3)^2=64;\ 3^{2^2}=81;\ 2^{3^2}=512$ ....**3 p**

b) Urmărim ultima cifră a numărului..**1 p**

Dacă $a\geq 2$ atunci $4\,|\,2^a$, iar 2^{4k} are ultima cifră 6..**2 p**

Ultima cifră a numărului este 2, care nu convine..**1 p**

3. Un număr natural A va fi numit „*rotund*” dacă suma cifrelor lui A este egală cu numărul cifrelor lui A (de exemplu, numărul 300210 este *rotund*).

a) Să se scrie toate numerele naturale *rotunde* care au trei cifre.

b) Să se calculeze diferența dintre cel mai mare şi cel mai mic număr *rotund* care au câte 100 de cifre.

c) Să se arate că, pentru orice număr natural $n\geq 2$, există un număr *rotund* care are $2n$ cifre şi este divizibil cu 22.

Soluție. a) $300, 210, 201, 102, 120, 111$ ....**3 p**

b) Cel mai mare număr este $99...9100...0$ (11 cifre de 9)..**1 p**

Cel mai mic număr este $100...099...9$ (11 cifre de 9)..**1 p**

Finalizare..**1 p**

c) De exemplu, $2211...100$ ($2n-4$ cifre de 1)..**1 p**

4. Pe tablă sunt scrise numerele 3, 7, 12, 14, 22, 35, 49. Doi elevi şterg câte trei numere. Un al treilea elev constată că suma numerelor şterse de unul dintre ei este de patru ori mai mare decât suma numerelor şterse de celălalt. Să se determine numărul rămas pe tablă.

Soluție. Trebuie ca suma numerelor şterse să fie divizibilă cu 5..**3 p**

Deoarece suma tuturor numerelor este 142, numărul rămas poate fi 7, 12 sau 22..**1 p**

Convine doar 22..**3 p**

Orice alte soluții se punctează corespunzător.