

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -****CLASA A 12 – A**

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

1. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care este de două ori derivabilă și are proprietățile:

$$f(0) = 0, f'(0) = 1 \text{ și } f''(x) + 2f'(x) + f(x) \geq 0 \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

a) Arătați că funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = e^x f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este convexă și $f(x) \geq xe^{-x}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 x^n f(x) dx \geq \frac{(n+1)!}{e} \left(e^{-1} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{(n+1)!} \right)$.

2. a) Rezolvați în \mathbb{Z}_5 ecuația $x^3 = a^2$, unde $a \in \mathbb{Z}_5$.

b) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și (G, \cdot) un grup cu $3n+1$ elemente. Arătați că, pentru orice $a \in G$, ecuația $x^3 = a^2$ are exact o soluție.

3. Dacă (G, \cdot) este un grup finit cu elementul neutru e și p este un număr natural nenul, notăm $G_p = \{x \in G \mid x^p = e\}$.

a) Arătați că, dacă p este impar, atunci G_p are un număr impar de elemente.

b) Arătați că nu există un grup (G, \cdot) astfel încât G_2 să aibă 3 elemente, dar există un grup (G, \cdot) astfel încât G_2 să aibă 4 elemente.

4. Fie $m \in (0;1)$. Vom spune că o funcție $f: [0;1] \rightarrow [0;1]$ are media m dacă este integrabilă și

$$\int_0^1 f(x) dx = m.$$

a) Arătați că mulțimea funcțiilor care au media m este infinită.

b) Arătați că, dacă $g: [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție crescătoare și f este o funcție cu media m , atunci

$$\int_0^m g(x) dx \leq \int_0^1 f(x)g(x) dx \leq \int_{1-m}^1 g(x) dx.$$