



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -**

**CLASA A 11 – A**

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte.  
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

1. a) Fie  $a$  un număr real. Arătați că, pentru orice număr natural  $n > |a|$ ,

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \geq 1 + a.$$

b) Arătați că, pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x \geq 1 + x$ .

2. a) Arătați că există două matrice  $A, B \in M_2(\mathbb{R})$  astfel ca, pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$\det(xA + yB) = x^2 + y^2.$$

b) Arătați că nu există matricele  $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$  astfel ca, pentru orice  $x, y, z \in \mathbb{R}$ ,

$$\det(xA + yB + zC) = x^2 + y^2 + z^2.$$

3. a) Justificați afirmația: „Pentru orice  $x \in (0, \infty)$ ,  $\sin x < x$ ”.

b) Fie  $a \in [0, 1]$  și  $(x_n)_{n \geq 1}$  șirul definit prin

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \sin \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Arătați că șirul este convergent și determinați-i limita.

4. Fie  $n \geq 2$  un număr natural și  $A \in M_n(\mathbb{C})$  o matrice nenulă, cu  $\det A = 0$ . Demonstrați că:

$$A + A^* = \operatorname{tr}(A)I_n \text{ dacă și numai dacă } n = 2.$$

( $\operatorname{tr}(A)$  este suma elementelor de pe diagonala principală a matricei  $A$ )