OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -

CLASA A 10 – A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1 (*M. Perianu*)

Rezolvaţi, în mulţimea numerelor reale pozitive, ecuaţia $x^{x^{10}}=10$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Logaritmând în baza 10, obţinem $x^{10}\cdot \lg x=1$, de unde rezultă că $\lg x>0$, adică $x>1$.	**3 puncte**
Observăm că $\sqrt[10]{10}$ este soluţie	**3 puncte**
Deoarece funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{10}\lg x$ este strict crescătoare, aceasta este unica soluţie	**4 puncte**

Subiectul 2 (*M. Chirciu*)

Fie x un număr real şi $a,b,c\in(0,\infty)$ astfel încât $a^x+b^x+c^x=a^{x+1}b^{x+1}c^{x+1}$. Arătaţi că

$$a^{2x+3}+b^{2x+3}+c^{2x+3}\geq 9.$$

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Ştim că $a^x+b^x+c^x\geq 3a^{x/3}b^{x/3}c^{x/3}$	**3 puncte**
Din ipoteză rezultă $a^{2x/3+1}b^{2x/3+1}c^{2x/3+1}\geq 3$	**4 puncte**
Astfel, $a^{2x+3}+b^{2x+3}+c^{2x+3}\geq 3a^{2x/3+1}b^{2x/3+1}c^{2x/3+1}\geq 9$	**3 puncte**

Subiectul 3 (***)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că $f\left(\left(f(x)\right)^3\right)=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Arătaţi că funcţia *f* este bijectivă şi că $f\left(f(x)\right)=\sqrt[3]{x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Dacă $f(x_1)=f(x_2)$, atunci $x_1=f\left(\left(f(x_1)\right)^3\right)=f\left(\left(f(x_2)\right)^3\right)=x_2$, deci *f* este injectivă	**3 puncte**
Pentru $y\in\mathbb{R}$, luând $x=(f(y))^3$ obţinem $f(x)=y$, deci *f* este surjectivă	**3 puncte**
Apoi $f\left(\left(f(f(x))\right)^3\right)=f(x)$ implică $\left(f(f(x))\right)^3=x$, de unde $f\left(f(x)\right)=\sqrt[3]{x}$.	**4 puncte**

Subiectul 4 (*M. Perianu*)

Se consideră numerele complexe z_1, z_2,..., z_{100} cu proprietatea că $z_k \cdot z_{k+1} - 2z_k + 4 = 0$, pentru orice $k \in \{1,2,3,\dots,99\}$.

a) Arătaţi că $z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_{99}$ este număr întreg negativ.

b) Calculaţi suma $\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{4+2|z_k|+|z_k z_{k+1}|}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Avem $z_{k+1} = \frac{2z_k - 4}{z_k}$, pentru orice $k = \overline{1,99}$.	**1 punct**
Obţinem $z_{k+2} = -\frac{4}{z_k - 2}$, $k = \overline{1,98}$ şi $z_{k+3} = z_k$, $k = \overline{1,97}$	**2 puncte**
$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_{99} = (z_1 \cdot z_2 \cdot z_3)^{33} = \left(z_1 \cdot \frac{2z_1 - 4}{z_1} \cdot \frac{-4}{z_1 - 2} \right)^{33} = -8^{33} =$ întreg negativ	**2 puncte**
b) $S = 33\left(\frac{1}{4+2\|z_1\|+\|z_1 z_2\|} + \frac{1}{4+2\|z_2\|+\|z_2 z_3\|} + \frac{1}{4+2\|z_3\|+\|z_3 z_1\|} \right)$	**2 puncte**
$S = 33\left(\frac{1}{4+2\|z_1\|+\|z_1 z_2\|} + \frac{\|z_1\|}{4\|z_1\|+2\|z_1 z_2\|+8} + \frac{\|z_1 z_2\|}{4\|z_1 z_2\|+16+8\|z_1\|} \right) =$ $= \frac{33}{4+2\|z_1\|+\|z_1 z_2\|}\left(1 + \frac{\|z_1\|}{2} + \frac{\|z_1 z_2\|}{4} \right) = \frac{33}{4}$.	**3 puncte**