INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

MINISTERUL EDUCAȚIEI CERCETĂRII TINERETULUI ȘI SPORTULUI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -

CLASA A 10 – A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Rezolvaţi, în mulţimea numerelor reale pozitive, ecuaţia

$$x^{x^{10}} = 10.$$

2. Fie x un număr real şi $a, b, c \in (0, \infty)$ astfel încât $a^x + b^x + c^x = a^{x+1}b^{x+1}c^{x+1}$. Arătaţi că

$$a^{2x+3} + b^{2x+3} + c^{2x+3} \geq 9$$

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că $f\left(\left(f(x)\right)^3\right) = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că funcţia f este bijectivă şi că $f\left(f(x)\right) = \sqrt[3]{x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

4. Se consideră numerele complexe $z_1, z_2, ..., z_{100}$ cu proprietatea că $z_k \cdot z_{k+1} - 2z_k + 4 = 0$, pentru orice $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 99\}$.

a) Arătaţi că $z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_{99}$ este număr întreg negativ.

b) Calculaţi suma $\displaystyle\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{4 + 2|z_k| + |z_k z_{k+1}|}$.

Problema 2 a fost selectată din nr. 10/2011 al ***Gazetei Matematice***- Seria B, publicaţie lunară pentru tineret, fondată în anul 1895, editată de Societatea de Ştiinţe Matematice din România