INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

MINISTERUL EDUCAȚIEI CERCETĂRII TINERETULUI ȘI SPORTULUI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -

CLASA A 9 - A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Se consideră mulţimea $M = \{1, 2, 3, \ldots, 2012\}$ şi mulţimile

$$A = \left\{2x+1 \,\middle|\, x \in \mathbb{N}\right\} \cap M,\ B = \left\{3x+2 \,\middle|\, x \in \mathbb{N}\right\} \cap M,\ C = \left\{5x+4 \,\middle|\, x \in \mathbb{N}\right\} \cap M.$$

a) Determinaţi numărul elementelor mulţimilor A, B şi C.

b) Determinaţi numărul elementelor mulţimii $A \cap B \cap C$.

2. Pentru fiecare număr natural $n \geq 2$ se consideră numărul

$$E(n) = \underbrace{\sqrt{\frac{1}{(n-1)^2} + \sqrt{\frac{1}{(n-2)^2} + \ldots + \sqrt{\frac{1}{1^2} + 1}}}}_{n-1 \text{ radicali}}.$$

Arătaţi că partea întreagă a numărului $nE(n)$ este n, pentru orice $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

3. Pe laturile $(AB), (BC), (CA)$ ale triunghiului ABC se iau punctele M, N, respectiv P astfel încât

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NB}{NC} = \frac{PC}{PA} = k.$$

a) Arătaţi că $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

b) Arătaţi că $AN + BP + CM < AB + BC + CA$.

4. Numerele reale x, y, z, t verifică relaţiile $x + y + z + t = 0$ şi $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$. Arătaţi că

$$-1 \leq xy + yz + zt + tx \leq 0.$$

Problema 3 a fost selectată din nr. 12/2011 al ***Gazetei Matematice***- Seria B, publicaţie lunară pentru tineret, fondată în anul 1895, editată de Societatea de Ştiinţe Matematice din România