

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
- ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -**

**CLASA A VII-A
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte. Se acordă numai punctaje întregi.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Problema 1. a) Demonstrați că, oricare ar fi numerele naturale nenule a, b cu $a < b$, are loc inegalitatea $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \geq \frac{1}{ab}$.

b) Considerăm primele zece numere naturale prime luate în ordine strict crescătoare,

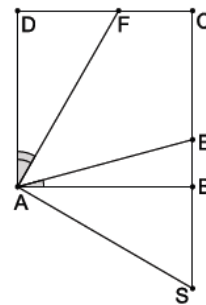
$$p_1, p_2, \dots, p_{10}. \text{ Demonstrați că } \frac{1}{p_1 p_2} + \frac{1}{p_2 p_3} + \frac{1}{p_3 p_4} + \dots + \frac{1}{p_9 p_{10}} < \frac{14}{29}.$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ba} \geq \frac{1}{ab}$, cu egalitate pentru $b = a + 1$	2p
b) Avem $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots, p_{10} = 29$, deci	2p
$\frac{1}{p_1 p_2} + \frac{1}{p_2 p_3} + \frac{1}{p_3 p_4} + \dots + \frac{1}{p_9 p_{10}} \leq \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{23 \cdot 29} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_{10}}$	2p
Aplicând a), obținem $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{23 \cdot 29} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{23} - \frac{1}{29} = \frac{1}{2} - \frac{1}{29}$	3p
Cum $\frac{1}{2} - \frac{1}{29} = \frac{14}{29}$, rezultă concluzia.	1p

Problema 2. Considerăm pătratul $ABCD$ și punctele $E \in (BC)$, $F \in (DC)$. Dacă $m(\sphericalangle BAE) = 15^\circ$ și $m(\sphericalangle DAF) = 30^\circ$, determinați $m(\sphericalangle AEF)$.

Gazeta Matematică nr.7-8-9/ 2011

Detalii rezolvare	Barem asociat
Avem $m(\sphericalangle FAE) = 45^\circ$.	1p
Fie $S \in (CB)$ astfel încât $B \in (CS)$ și $BS = DF$.	2p
Atunci $\triangle ABS \cong \triangle ADF$ (c.c.).	3p
Obținem că $m(\sphericalangle EAS) = m(\sphericalangle BAS) + m(\sphericalangle BAE) = 45^\circ$, deci	2p
$\triangle EAS \cong \triangle EAF$.	
Deasemenea, din congruența anterioară avem și $AF = AS$, de unde deducem că $\triangle AEF \cong \triangle AES$ (L.U.L.).	



Atunci $m(\sphericalangle AEF) = m(\sphericalangle AES) = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$, deci $m(\sphericalangle AEF) = 75^\circ$.	2p
--	-----------

Problema 3. a) Dacă x și y sunt numere raționale cu proprietatea că $x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 0$, demonștrăți că $x = y = 0$.

b) Determinați toate perechile de numere raționale $(a; b)$ care verifică egalitatea

$$\sqrt{2(a+1)^2 - 2\sqrt{2}} = |b+1| \cdot \sqrt{3} - |\sqrt{2} - \sqrt{3}|.$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Presupunem că $y \neq 0$. Atunci relația din enunț este echivalentă cu $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, fals.	2p
Rezultă că $y = 0$, deci și $x = 0$.	1p
b) Relația din enunț devine $ a+1 \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = b+1 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{2}$.	2p
Echivalent cu $(a+1 -3) \cdot \sqrt{2} = (b+1 -1) \cdot \sqrt{3}$.	2p
Conform a), rezultă $ a+1 -3 = 0$ și $ b+1 -1 = 0$.	1p
Obținem perechile $(2; 0), (-4; 0), (2; -2), (-4; -2)$.	2p

1. Problema 4. În rombul $ABCD$ bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle CAD$, $\sphericalangle CBD$ și dreapta DC sunt concurente în E .

a) Determinați măsura unghiului $\sphericalangle AEB$;

b) Aflați măsurile unghiurilor rombului.

prof. Victor Nicolae, Petre Simion, Mircea Fianu

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Notăm $m(\sphericalangle DAC) = 2x^\circ$. Atunci $m(\sphericalangle BAE) = 3x^\circ$, iar	1p
$m(\sphericalangle ABE) = m(\sphericalangle ABD) + m(\sphericalangle DBE) = 90^\circ - 2x^\circ + \frac{90^\circ - 2x^\circ}{2} = 135^\circ - 3x^\circ$.	1p
Din suma unghiurilor în triunghiul ABE , rezultă că $m(\sphericalangle AEB) = 45^\circ$.	1p
b) În triunghiurile BCD și CAD , (BE respectiv AE sunt bisectoare. Conform teoremei bisectoarei obținem:	
$\frac{BC}{BD} = \frac{EC}{ED} = \frac{AC}{AD}$	
Rezultă că $BC \cdot AD = BD \cdot AC$	2p
Echivalent cu $BC \cdot \frac{AB}{2} = \frac{BD \cdot AC}{2} = A_{ABCD}$	1p
Dacă $CT \perp AB, T \in AB$, atunci $AB \cdot CT = AB \cdot \frac{BC}{2} = A_{ABCD}$, deci $CT = \frac{AB}{2}$.	2p
Rezultă: măsurile unghiurilor rombului sunt în perechi egale cu 30° , respectiv 150° .	1p

