



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -**

**CLASA A VI-A
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte. Se acordă numai punctaje întregi.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

Subiectul 1. Aflați numerele naturale de trei cifre care prin împărțire la 7 dau restul 1, prin împărțire la 8 dau restul 4 și prin împărțire la 9 dau restul 7.

GAZETA MATEMATICĂ 1/2011

Detalii rezolvare	Barem asociat
Fie $n = \overline{abc}$ numerele cu proprietatea din enunț. În baza ipotezei obținem: $n = 7c_1 + 1$, $n = 8c_2 + 4$ și $n = 9c_3 + 7$.	3 p
Adunăm 20 în fiecare membru în relațiile de mai sus, obținem: $n + 20 = 7c_1 + 21 = 7(c_1 + 3)$, deci $7 \mid n + 20$; $n + 20 = 8c_2 + 24 = 8(c_2 + 3)$, deci $8 \mid n + 20$ și $n + 20 = 9c_3 + 27 = 9(c_3 + 3)$, deci $9 \mid n + 20$.	3 p
Așadar cel mai mic multiplu comun al numerelor 7, 8 și 9, adică 504, este un divizor al numărului $n + 20$; deci $n + 20 \in \{508 \cdot k \mid k \in \square\}$.	2 p
Cum numărul n are trei cifre, rezultă că $n + 20 = 504$ sau $n + 20 = 1008$, de unde $n \in \{484, 988\}$.	2 p

Subiectul 2.

a) Dați exemplu de un număr rațional mai mare decât $\frac{2011}{2012}$ și mai mic decât $\frac{2012}{2013}$. Justificați răspunsul.

b) Calculați suma tuturor numerelor raționale de forma $r = \frac{n}{990}$, $n \in \square$, cu proprietatea că $0, (98) < r < 0,99$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Un exemplu este media aritmetică a numerelor raționale x și y , unde $x = \frac{2011}{2012}$ și $y = \frac{2012}{2013}$, care este, la rândul ei un număr rațional.	2 p
b) Avem $\frac{97}{99} < \frac{n}{990} < \frac{99}{100}$	2 p

Aducând la același numitor, obținem $\frac{9700}{9900} < \frac{10n}{9900} < \frac{9801}{9900}$	2 p
Rezultă că $970 < 10n \leq 980$, deci $n \in \{971, 972, \dots, 980\}$	1 p
Așadar $r \in \left\{ \frac{971}{990}, \frac{972}{990}, \dots, \frac{980}{990} \right\}$	1 p
Suma numerelor este egală cu $\frac{1951}{198}$	2 p

Subiectul 3. Se consideră mulțimea P a pătratelor perfecte. Determinați cel mai mic număr de elemente care trebuie extrase din mulțimea P astfel încât, printre numerele extrase, să existe cu siguranță două care să aibă suma sau diferența divizibilă cu 10.

prof. Lucian Petrescu, Tulcea

Detalii rezolvare	Barem asociat
Vom arăta că numărul cerut este egal cu 5. Pentru $n \in \square$ avem: $u(n^2) \in A = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$.	4 p
Nu sunt suficiente numai 4 bile extrase deoarece putem obține terminațiile: 1, 4, 5, 0	3p
Se demonstrează că $n = 5$ verifică concluzia.	3 p

Subiectul 4. Se consideră mulțimea $A = \left\{ x \in \square \mid x = 5k \text{ sau } x = 5k + 1, k \in \square^* \right\}$.

- a) Arătați că, dacă $a \in A$, atunci $a^n \in A$, oricare ar fi $n \in \square^*$;
b) Pentru fiecare număr natural m , $m \geq 2$, determinați numărul de elemente al mulțimii $P_m = \left\{ p \in A \mid p^m \leq 2012 \right\}$.

prof. Lucian Petrescu, Tulcea, Mircea Fianu

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Avem $a \in A$ dacă și numai dacă $a \neq 0$ și $u(a) \in \{0; 1; 5; 6\}$.	2 p
Deoarece pentru $u(a) \in \{0; 1; 5; 6\}$, rezultă $u(a^n) = [u(a)]^n \in \{0; 1; 5; 6\}$, oricare $n \in \square^*$.	1 p
Deducem că $a^n \in A$, oricare $n \in \square^*$.	1 p
b) Pentru $m \in \square$, $m \geq 5$ și $p \in A$. Rezultă că $p^m \geq 5^5 > 2012$. Prin urmare, $P_m = \emptyset$, oricare $m \in \square$, $m \geq 4$	1 p
Considerăm $m = 4$ și $p \in A$. Cum $10^4 = 10000 > 2012$, elementele care verifică sunt Dacă $p = 5$ și $p = 6$, deci $P_4 = \{5, 6\}$ care are 2 elemente.	1 p
Considerăm $m = 3$ și $p \in A$. Dacă $p \geq 13$, atunci $p^3 \geq 13^3 > 2012$	1 p
Rezultă că $P_3 = \{5; 6; 10; 11\}$ care are 4 elemente	1p
Considerăm $m = 2$ și $p \in A$. Dacă $p \geq 45$, atunci $p^2 \geq 45^2 > 2012$	1p
Rezultă că $P_2 = \{5; 6; 10; 11; 15; 16; 20; 21; 25; 26; 30; 31; 35; 36; 40; 41\}$ care are 16 elemente.	1p