OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -

CLASA A V-A

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. 1. Se consideră numerele naturale a şi b, $a > b > 0$. Se ştie că, împărţind numărul a la numărul $a-b$ se obţine câtul 2 şi restul 3.
a) Dacă $a = 2011$, determinaţi câte valori posibile are diferenţa $a-b$;
b) Determinaţi câtul şi restul împărţirii numărului b la numărul $a-b$.

prelucrare *Gazeta Matematică* nr.3/2011

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Conforn teoremei împărţrii cu rest, avem $a = 2\cdot(a-b)+3$, cu $a-b>3$.	**2 p**
Adică $2011 = 2(2011-b)+3$, echivalent cu $2008 = 2(2011-b)$.	**2 p**
Deci $2011-b = 1004$, adică $b = 1007$, o singură valoare	**2 p**
b) Conform figurii alăturate, în care $AC = a$ şi $AB = b$, obţinem că $b = 1\cdot(a-b)+3$ A AD=3 D DB=a-b B BC=a-b C	**2 p**
Cum $a-b>3$, rezultă câtul împărţirii lui b la $a-b$ egal cu 1, iar restul egal cu 3.	**2p**

2. Se consideră mulţimea $A = \{4k+2 \mid k \in \mathbb{N}\}$.
a) Verificaţi dacă $2012 \in A$;
b) Arătaţi că, oricum am alege două numere din mulţimea A, suma sau diferenţa acestora este multiplu de 8.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Restul împărţirii la 4 a oricărui număr din mulţimea A este egal cu 2.	**1 p**
Cum restul împărţirii lui 2012 la 4 este egal cu 0, deducem că $2012 \notin A$.	**2 p**
b) Fie $a, b \in A$, cu $a \geq b$; deci $a = 4p+2$, $b = 4s+2$, unde $p, s \in \mathbb{N}$ şi $p \geq s$.	**1 p**
Avem $a+b = 4(p+s+1)$ şi $a-b = 4(p-s)$.	**2 p**
Dacă $a+b = 4(p+s+1)$ nu se divide cu 8 înseamnă că numărul $p+s+1$ este impar, deci numărul $p+s$ este par.	**2 p**
Rezultă că şi numărul $p-s$ este par, deci numărul $a-b = 4(p-s)$ este multiplu al lui 8.	**2 p**

Subiectul 3. Determinaţi numerele naturale m, n şi p astfel încât $8^m + 11^n + 13^p = 2012$.

prof. Mircea Fianu

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Răspuns: $m = n = 3,\ p = 2$	
Cum $13^2 < 2012 < 13^3$, rezultă că $p \in \{0;1;2\}$.	**1p**
Pentru $p = 2$, obţinem $8^m + 11^n = 1843 < 11^4$. Deci $n \in \{0;1;2;3\}$.	**2p**
Dacă $n = 3$, obţinem $8^m = 512 = 8^3$, deci $m = 3$.	**2p**
Dacă $n \le 2$, rezultă că $8^m \ge 8^4 > 1843$, prin urmare nu avem soluţii.	**1p**
Pentru $p = 1$, obţinem $8^m + 11^n = 1999$, deci $n \le 3$	**1p**
Cum $1999 > 1999 - 11^n = 8^m > 668$, rezultă că nu avem soluţii.	**1p**
Dacă $p = 0$, obţinem $8^m + 11^n = 2011$.	**1p**
Cum $2011 > 2011 - 11^n = 8^m > 680$, rezultă că nu avem soluţii.	**1p**

Subiectul 4. Se consideră numerele naturale *a* şi *b*, astfel încât $2 \le a < b$. Se completează fiecare dintre cele 9 pătrăţele ale pătratului din figura alăturată cu numerele 1, *a* şi *b* astfel încât fiecare dintre acestea să apară o singură dată pe fiecare linie şi pe fiecare coloană a pătratului.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \quad & \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad & \quad \\ \hline\end{array}$$

a) Arătaţi că două dintre colţurile opuse ale pătratului sunt completate cu numere egale;
b) Arătaţi că una dintre diagonalele pătratului este completată cu numere egale;
c) Dacă produsul numerelor de pe fiecare linie, de pe fiecare coloană şi de pe fiecare diagonală este egal cu *n*, arătaţi că *n* este cub perfect.

prof. Lucian Petrescu, Tulcea

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Deoarece cele patru colţuri ale pătratului se pot completa numai cu trei numere, rezultă, conform principiului cutiei că în două dintre colţuri se află acelaşi număr.	**2p**
Dar, conform ipotezei cele două colţuri nu se pot afla pe aceeaşi linie/coloană. Rezultă că cele două colţuri care sunt completate cu numere egale sunt opuse.	**1p**
b) Considerăm $\{x; y; z\} = \{1; a; b\}$. Presupunem că, două colţuri opuse ale pătratului sunt completate cu *x*, iar unul dintre celelalte colţuri este completat cu *y*. (vezi figura). Înseamnă că linia/coloana pe care se află câte două dintre aceste colţuri se completează cu *z*. $\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline x & & \\ \hline z & & \\ \hline y & z & x \\ \hline\end{array}$	**1p**
Deci colţul opus lui *y* se completează cu *z*, apoi, obligatoriu, între colţurile completate cu *x* şi *z* trebuie completat cu *y*. $\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline x & y & z \\ \hline z & & y \\ \hline y & z & x \\ \hline\end{array}$	**2p**
Rezultă că centrul pătratului trebuie completat cu *x*, deci una dintre diagonale este completată cu numere egale.	**1p**
c) Condiţia din ipoteză spune că $x^3 = xyz = n$.	**1p**
Cum $\{x; y; z\} = \{1; a; b\}$, $2 \le a < b$, rezultă $n = x^3 = xyz > 1$.	**1p**
Argumentarea faptului că există triplete de numere care îndeplinesc condiţiile problemei: $x \notin \{1; b\}$, deci $x = a$, de unde $b = a^2$.	**1p**