OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 –
CLASA A XII-A
SUBIECTELE

Problema 1. Să se calculeze

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x^2+6}{x^4} \sin x \, \mathrm{d}x.$$

Problema 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup abelian cu elementul neutru e. Pentru fiecare număr natural nenul n considerăm mulţimea $H_n = \{x \in G \mid x^n = e\}$. Să se arate că:

a) H_n este subgrup al lui G, oricare ar fi numărul natural nenul n.

b) Dacă pentru fiecare număr natural nenul n mulţimea H_n are cel mult n elemente, atunci subgrupurile finite ale lui G sunt mulţimile H_n, cu $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 3. Pentru un grup $(G, \cdot)$, notăm

$$Z(G) = \{a \in G \mid ax = xa, \forall x \in G\}.$$

a) Să se arate că, dacă $(G, \cdot)$ este un grup finit necomutativ, atunci

$$|Z(G)| \leq \frac{1}{4}\,|G|.$$

b) Să se dea exemplu de grup finit G pentru care $|Z(G)| = \dfrac{1}{4}\,|G|$.

Notă. $|M|$ reprezintă numărul elementelor mulţimii finite M.

Problema 4. a) Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^n x}{\cos^{n-1} x} dx.$$

b) Se consideră funcţiile continue $f, g : [a, b] \to (0, \infty)$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Să se arate că şirul cu termenul general

$$c_n = \int_a^b f^n(x) g(x) dx, \quad n \geq 1$$

are limită.

Toate subiectele sunt obligatorii şi se notează cu puncte de la 0 la 7
Timp de lucru: 3 ore