OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 –
CLASA A XI-A
SUBIECTELE

Problema 1. Se consideră şirurile de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ şi $(c_n)_{n\geq 1}$ definite prin

$$a_1 > 0, b_1 > 0, a_{n+1} = a_n + 2b_n, b_{n+1} = a_n + b_n, c_n = \frac{a_n}{b_n}$$

oricare ar fi n natural nenul.

a) Să se arate că $|c_{n+1} - \sqrt{2}\,| \leq \dfrac{1}{2}\,|c_n - \sqrt{2}\,|$, oricare ar fi n natural nenul.

b) Să se arate că dacă şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ este monoton, atunci el este constant.

Problema 2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale şi $A_n = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se studieze convergenţa şirului $(A_n x_n)_{n\geq 1}$ în cazul

$$a_n = n^2 + n + (-1)^n(n^2 - n), \quad x_n = \frac{1}{na_n}, \forall n \geq 1.$$

b) Să se arate că, dacă $(x_n)_n$ este un şir descrescător astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_n = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x_n = 0$.

Problema 3. a) Să se arate că, dacă n este un număr natural nenul, atunci pentru orice două matrice $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ are loc relaţia $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, unde $\operatorname{tr}(X)$ desemnează suma elementelor de pe diagonala prinicipală a matricei pătrate X (*urma* matricei X).

b) Determinaţi toate perechile de numere reale (x, y) pentru care există două matrice $A, B \in M_2(\mathrm{R})$ astfel încât

$$AB = \begin{pmatrix} x & 60 \\ 2 & y \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad BA = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Problema 4. Fie a, b, c numere reale strict pozitive şi nu toate egale. Să se arate că matricea

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c & 0 & b \\ c & 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & c & 0 & a & 0 \\ 0 & c & 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}$$

este inversabilă.

Toate subiectele sunt obligatorii şi se notează cu puncte de la 0 la 7
Timp de lucru: 3 ore