



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 –
CLASA A X-A

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1.

| Detalii rezolvare | Barem asociat |
|--|-----------------|
| Avem de arătat că $0 < \sqrt[3]{1+2^x} + \sqrt[3]{1-2^x} < 2$ | 2 puncte |
| $\sqrt[3]{1+2^x} + \sqrt[3]{1-2^x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1+2^x} > \sqrt[3]{2^x-1} \Leftrightarrow 2^x+1 > 2^x-1$, evident | 2 puncte |
| $\frac{\sqrt[3]{1+2^x} + \sqrt[3]{1-2^x}}{2^x} < 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1+2^x} - 1 < 1 + \frac{\sqrt[3]{2^x-1}}{2^x}$ $\Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{(1+2^x)^2} + \sqrt[3]{1+2^x} + 1}{\sqrt[3]{(2^x-1)^2} - \sqrt[3]{2^x-1} + 1} < \frac{\sqrt[3]{(1+2^x)^2} + \sqrt[3]{1+2^x} + 1}{\sqrt[3]{(2^x-1)^2} - \sqrt[3]{2^x-1} + 1}$ $\Leftrightarrow \sqrt[3]{(1+2^x)^2} + \sqrt[3]{1+2^x} > \sqrt[3]{(2^x-1)^2} - \sqrt[3]{2^x-1}$ – adevărat: $(2^x+1)^2 > (2^x-1)^2$ și $2^x+1 > 1-2^x$ | 3 puncte |

Subiectul 2.

| Detalii rezolvare | Barem asociat |
|--|-----------------|
| Inegalitatea este echivalentă cu $\frac{\lg^2 x}{\lg a} + \frac{\lg^2 y}{\lg b} \geq \frac{\lg^2(xy)}{\lg(ab)}$ | 2 puncte |
| Aceasta se scrie $\frac{t^2}{\alpha} + \frac{u^2}{\beta} \geq \frac{(t+u)^2}{\alpha+\beta}$, unde $t, u, \alpha, \beta > 0$ | 2 puncte |
| Ea este adevărată, fiind echivalentă cu $(\beta t - \alpha u)^2 \geq 0$ | 3 puncte |

Subiectul 3.

Gazeta Matematică nr. 12/2012, prof. *Marian Cucoaneș*, Mărășești

| Detalii rezolvare | Barem asociat |
|--|-----------------|
| Numărul $\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}}$ are modulul 1 și argumentul $2 \arg(a-b)$ | 2 puncte |
| Suma a trei numere complexe de modul 1 este nulă dacă și numai dacă argumentele lor sunt de forma $\alpha, \alpha + 2\pi/3, \alpha + 4\pi/3$ | 2 puncte |
| Condiția precedentă se realizează dacă și numai dacă $A = B = \pi/3$ (adică triunghiul ABC este echilateral), deoarece $\arg(b-c) = \arg(a-b) + (\pi - B)$, $\arg(c-a) = \arg(a-b) + (\pi + A)$ sau $\arg(b-c) = \arg(a-b) - (\pi - B)$, $\arg(c-a) = \arg(a-b) - (\pi + A)$ | 3 puncte |

Subiectul 4.

Prof. *Eugen Radu*, București

| Detalii rezolvare | Barem asociat |
|---|-----------------|
| $f(z) = f(y) \Leftrightarrow z^2 - y^2 = 2(\bar{z} - \bar{y})$ | 1 punct |
| Luând module reiese $ z-y (z+y -2) = 0$ | 1 puncte |
| În cazul $ z-y = 0$ obținem $z = y$, iar în cazul $ z+y = 2 \geq z + y $ obținem $ z = y = 1$ și $z = xy, x \in \mathbb{R}_+$, deci, în toate cazurile, $f(y) = f(z)$ implică $y = z$ | 2 puncte |
| $g(n) = [n\sqrt[3]{3}] - n + 1$, deoarece cel mai mare cub perfect din intervalul dat este $[n\sqrt[3]{3}]$ | 1 punct |
| $g(n+1) - g(n) = [n\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3}] - [n\sqrt[3]{3}] - 1 \in \{0, 1\}$ arată că șirul $(g(n))_n$ este crescător și diferența oricăror doi termeni consecutivi este cel mult 1, iar $g(n) > n(\sqrt[3]{3} - 1)$ arată că șirul este nemărginit, deci mulțimea valorilor termenilor șirului este \mathbb{N}^* | 2 puncte |