OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 –
CLASA A X-A

SUBIECTELE

Problema 1. Să se arate că imaginea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin
$$f(x) = \sqrt[3]{1 + 2^x} + \sqrt[3]{1 - 2^x}$$
este inclusă în intervalul $(0, 2)$.

Problema 2. Fie a, b, x, y numere reale din intervalul $(1, \infty)$. Să se demonstreze că
$$(\lg x) \cdot (\log_a x) + (\lg y) \cdot (\log_b y) \geq (\lg xy)(\log_{ab} xy).$$

Problema 3. Fie A, B, C trei puncte distincte în planul complex şi a, b, c afixele acestora. Să se arate că triunghiul ABC este echilateral dacă şi numai dacă
$$\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} + \frac{b-c}{\overline{b}-\overline{c}} + \frac{c-a}{\overline{c}-\overline{a}} = 0.$$

Problema 4. a) Considerăm mulţimea $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. Să se arate că funcţia $f : D \to \mathbb{C}$ dată prin
$$f(z) = z^2 - 2\overline{z}$$
este injectivă.

b) Să se arate că funcţia $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ dată prin
$$g(n) = \text{ numărul cuburilor perfecte din intervalul } [n^3,\ 3n^3]$$
este surjectivă.

Toate subiectele sunt obligatorii şi se notează cu puncte de la 0 la 7
Timp de lucru: 3 ore