

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 –
CLASA A IX-A

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1.

 Prelucrare prof. *Ovidiu Șontea*, București

| Detalii rezolvare | Barem asociat |
|---|----------------|
| a) $a_1 = S_1 = 3, a_2 = S_2 - S_1 = 5 - 3 = 2, a_3 = S_3 - S_2 = 9 - 5 = 4$ | 1 punct |
| $\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{3} \neq \frac{4}{2} = \frac{a_3}{a_2}$ | 1 punct |
| Șirul nu este progresie geometrică. | 1 punct |
| b) Să presupunem că lungimea primei sărituri este s și că după n sărituri se întoarce în punctul inițial. Drumul parcurs de lăcustă va fi o linie frântă închisă $A_1A_2\dots A_nA_1$ cu segmentele de lungimi $s, 2s, 4s, \dots, 2^{n-1}s$. | 1 punct |
| Suma lungimilor primilor $n - 1$ segmente este $s + 2s + 4s + \dots + 2^{n-2}s = (2^{n-1} - 1)s$ | 1 punct |
| $2^{n-1}s = \overrightarrow{A_nA_1} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} \leq \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = (2^{n-1} - 1)s$. Fals. | 1 punct |
| Nu poate. | 1 punct |

Subiectul 2.

 Prof. *Marcel Țena*, București

| Detalii rezolvare | Barem asociat |
|---|-----------------|
| Se observă că $1 \notin A$. Dacă $x \in A$ atunci $\frac{1}{x} \in A$ și $1 - x \in A$. De aici $\frac{1}{1-x} \in A, 1 - \frac{1}{x} \in A$ și $1 - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{x-1} \in A$ | 3 puncte |
| Mulțimea căutată are cel mult cinci elemente, deci cel puțin două numere dintre cele 6 de mai sus sunt egale. | 1 punct |
| Analizarea tuturor cazurilor posibile ce trebuie să fie îndeplinite pentru ca mulțimea să nu depășească cinci elemente. | 2 puncte |
| Mulțimea este $\left\{2, \frac{1}{2}, -1\right\}$ | 1 punct |

Subiectul 3.

 Prelucrare Gazeta Matematică nr. 4/2012, prof. *Vasile Berghea*, Avrig

| Detalii rezolvare | Barem asociat |
|--|-----------------|
| Din inegalitatea Cauchy $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n^2}{n+x_1+x_2+\dots+x_n} = \frac{n}{2}$ | 3 puncte |
| Folosind relația din ipoteză obținem $\frac{4n-6}{n} \geq \frac{n}{2}$ | 1 punct |
| $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ | 1 punct |
| $n_{\max} = 6$, întrucât pentru $x_1 = x_2 = \dots = x_6 = 1$ se verifică relațiile din enunț | 2 puncte |

Subiectul 4.

| Detalii rezolvare | Barem asociat |
|---|-----------------|
| a) Luând originea în O , vectorii de poziție verifică $\vec{r}_{H_1} = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C$ și analogele | 2 puncte |
| $\frac{1}{2}(\vec{r}_{H_1} + \vec{r}_D) = \frac{1}{2}(\vec{r}_{H_2} + \vec{r}_A) = \frac{1}{2}(\vec{r}_{H_3} + \vec{r}_B) = \frac{1}{2}(\vec{r}_{H_4} + \vec{r}_C) = \vec{r}_P$ | 2 puncte |
| b) Mijlocul Q al lui $[MN]$ are vectorul de poziție $\frac{1}{2}(\vec{r}_M + \vec{r}_N) = \frac{1}{4}(\vec{r}_A + \vec{r}_C + \vec{r}_B + \vec{r}_D)$ | 1 punct |
| Din $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OQ}$ rezultă că O, P, Q sunt coliniare | 2 puncte |