

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 –
CLASA A IX-A

SUBIECTELE

Problema 1. a) Un șir de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$ are proprietatea

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2^n + 1,$$

pentru orice $n \geq 1$. Stabiliți dacă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este progresie geometrică.

b) Fie A_1, A_2 două puncte distincte într-un plan. O lăcustă sare pe acest plan din A_1 în A_2 , apoi continuă să sară, astfel încât lungimea fiecărei sărituri este de două ori mai mare decât cea precedentă. Poate să se întoarcă lăcusta vreodată în punctul A_1 ? (Justificare)

Problema 2. Să se determine mulțimile nevide $A \subset \mathbb{R}^*$ cu proprietățile:

a) mulțimea A are cel mult cinci elemente;

b) $x \in A \Rightarrow \frac{1}{x} \in A$ și $1 - x \in A$.

Problema 3. Să se determine cel mai mare număr natural n pentru care există numerele reale strict pozitive x_1, x_2, \dots, x_n astfel încât

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$$

și

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} = \frac{4n-6}{n}.$$

Problema 4. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc de centru O . Notăm cu H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, CDA , respectiv DAB și cu M, N mijloacele diagonalelor $[AC]$, respectiv $[BD]$.

a) Să se arate că segmentele $[DH_1], [AH_2], [BH_3], [CH_4]$ au același mijloc P .

b) Să se arate că punctele O, P și mijlocul segmentului $[MN]$ sunt coliniare.

*Toate subiectele sunt obligatorii și se notează cu puncte de la 0 la 7
Timp de lucru: 3 ore*