



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**- ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 -**

**CLASA A VIII-A**

**SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi.**  
**Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

**Subiectul 1.**

a) Arătați că  $(\sqrt{2}-1,42) \cdot (\sqrt{12}-3,48) \cdot (\sqrt{6}-2,46) < 0$ ;

b) Determinați cel mai mic număr natural  $a$  astfel încât, pentru oricare numere naturale distincte și nenule  $m, n$  și  $p$ , are loc inegalitatea  $\sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{p} + \sqrt{mn} + \sqrt{np} + \sqrt{pm} < a\sqrt{mnp}$ .

*Colecția Gazeta Matematică, seria B*

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Se aproximează numerele $\sqrt{2}, \sqrt{6}$ și $\sqrt{12}$ cu eroare de o sutime prin adaos și se constată că toți factorii produsului sunt negativi.	<b>3p</b>
b) Împărțim ambii membri ai inegalității din enunț cu $\sqrt{mnp}$ și obținem inegalitatea echivalentă $\frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{mn}} + \frac{1}{\sqrt{np}} + \frac{1}{\sqrt{pm}} < a$ .	<b>2p</b>
Putem presupune că $m \geq 1, n \geq 2, p \geq 3$ , deci $\frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{mn}} + \frac{1}{\sqrt{np}} + \frac{1}{\sqrt{pm}} \leq 1 + \sqrt{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{6}$ .	<b>1p</b>
Deoarece $3 < 1 + \sqrt{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{6} < 1 + 1,42 + 1,16 + 0,41 = 3,99 < 4$ , rezultă $a = 4$ .	<b>1p</b>

**Subiectul 2.**

Se consideră expresia  $E(x) = ax^2 + bx + c$ , unde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Determinați numerele  $a, b$  și  $c$  știind că  $E(x) \in \mathbb{Q}$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  și  $E(2013) = 2013$ .

*Prof. Cosmin Nițu, București*

Detalii rezolvare	Barem asociat
$E(\sqrt{2}) = 2a + b\sqrt{2} + c$ și $E(-\sqrt{2}) = 2a - b\sqrt{2} + c$ , deci $E(\sqrt{2}) - E(-\sqrt{2}) = 2b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ , deci $b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ . Analog, $b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ . Dacă $b \neq 0$ , obținem $\frac{b\sqrt{3}}{b\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \in \mathbb{Q}$ , fals. Deci $b = 0$ .	<b>3p</b>
$E(2\sqrt{2}) = 8a + c$ și $E(2\sqrt{2}) - 4 \cdot E(2) = -3c \in \mathbb{Q}$ , deci $c \in \mathbb{Q}$ și $a \in \mathbb{Q}$ .	<b>2p</b>

Cum $E(\sqrt{2}+1) = 3a+c+2a\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ , rezultă $a\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ . Deoarece $a \in \mathbb{Q}$ , obținem $a=0$ .	<b>1p</b>
Cum $E(2013) = c$ , rezultă $c = 2013$ .	<b>1p</b>

### Subiectul 3.

Se consideră paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A' B' C' D'$  în care  $AB=12$ ,  $BC=9$  și  $AA'=4$ . Determinați minimumul sumei  $MA+MB+MC+MD$ , unde  $M$  este un punct variabil pe fața  $A' B' C' D'$ .

*Prof. Cosmin Nițu, București*

Detalii rezolvare	Barem asociat
Fie $A''$ , $B''$ , $C''$ , $D''$ simetricile punctelor $A, B, C, D$ față de $A', B', C', D'$ . În triunghiul $MAA''$ , $MA'$ este mediană și înălțime, deci triunghiul este isoscel. Prin urmare, $MA = MA''$ și, analog, $MB = MB''$ , $MC = MC''$ și $MD = MD''$ .	<b>2p</b>
Avem $MA+MB+MC+MD = \frac{1}{2}(MA+MB+MC+MD+MA''+MB''+MC''+MD'')$ .	<b>1p</b>
$MA+MB+MC+MD = \frac{1}{2}[(MA+MC'')+(MA''+MC)+(MB+MD'')+(MB''+MD)]$	<b>1p</b>
Avem $MA+MC'' \geq AC''$ , $MC+MA'' \geq A''C$ , $MB+MD'' \geq BD''$ ; $MB''+MD \geq DB''$ . Egalitățile au loc atunci când $M \in AC''$ , etc. Deoarece $AC'' = A''C = BD'' = B''D = 17$ , rezultă că $MA+MB+MC+MD \geq 34$ .	<b>2p</b>
Deoarece dreptele $AC''$ , $C''A$ , $BD''$ , $B''D$ sunt concurente în punctul $O'$ , centrul feței $A' B' C' D'$ , egalitatea se obține pentru $M = O'$ .	<b>1p</b>

### Subiectul 4.

a) Dacă  $x, y$  și  $z$  sunt numere raționale strict pozitive și  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \in \mathbb{Q}$ , arătați că  $\sqrt{x}, \sqrt{y}$  și  $\sqrt{z}$  sunt numere raționale.

b) Se consideră numerele naturale nenule  $a, b$  și  $c$  astfel încât numerele  $x = (a+1)^2 - 4b$ ,

$y = (b+1)^2 - 4c$  și  $z = (c+1)^2 - 4a$  sunt naturale nenule. Dacă  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 2013$ , determinați numerele  $a, b$  și  $c$ .

*prof. Crisian Mangra, București, prof. Lucian Petrescu, Tulcea, prof. Mircea Fianu, București*

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Notăm $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = p \in \mathbb{Q}_+$ , deci $\sqrt{x} + \sqrt{y} = p - \sqrt{z}$ . Prin ridicare la pătrat, relația este echivalentă cu $\sqrt{xy} = r - p\sqrt{z}$ (1), unde $r = \frac{p^2 + z - x - y}{2} \in \mathbb{Q}$ .	<b>2p</b>
Dacă $r = 0$ , atunci $\sqrt{xy} = -p\sqrt{z} < 0$ , fals.	<b>1p</b>
Ridicând relația (1) la pătrat, se obține $2pr\sqrt{z} \in \mathbb{Q}$ , deci $\sqrt{z} \in \mathbb{Q}$ . Analog, $\sqrt{x}, \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$ .	<b>1p</b>
b) Cum 2013 este număr rațional, conform a) obținem că $x, y, z$ sunt pătrate perfecte. Deoarece $(a+1)^2$ și $(a+1)^2 - 4b$ sunt pătrate perfecte de aceeași paritate, deducem că $(a+1)^2 - 4b \leq (a-1)^2$ , de unde $4a \leq 4b$ . Procedând analog obținem $a \leq b \leq c \leq a$ . Prin urmare, $a = b = c$ .	<b>2p</b>
Deducem că $x = y = z = (a-1)^2$ . Avem $3 a-1  = 2013$ , de unde $a = b = c = 672$ .	<b>1p</b>

