



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 –**

CLASA A VI-A

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

Subiectul 1.

Determinați numerele prime p și q știind că $\frac{p}{q} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, unde a și b sunt numere naturale nenule.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

Detalii rezolvare	Barem asociat
Dacă $a = b$, rezultă $\frac{p}{q} = 2$, deci $q = 1$, contradicție. Înseamnă că una dintre fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{b}{a}$ este supraunitară, rezultă că $\frac{p}{q} > 1$, deci $p > q$.	1p
Putem considera $(a;b) = 1$, atunci $\frac{p}{q} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$. Fracția $\frac{a^2 + b^2}{ab}$ este ireductibilă, deci $q = ab$ și $p = a^2 + b^2$. Deducem că $a = 1$ sau $b = 1$.	3p
Dacă, de exemplu, $a = 1$, obținem $q = b$ și $p = b^2 + 1$. Cum p și q au parități diferite și $p > q$, rezultă $q = b = 2$ și $p = 5$. Într-adevăr, $\frac{5}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{1}$.	3p

Subiectul 2.

Determinați numerele $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ și cifra b astfel încât să aibă loc egalitatea $6^a + 1 = \overbrace{bb\dots b}^n$.

Colecția Gazeta Matematică, Seria B

Detalii rezolvare	Barem asociat
Pentru $a = 0$, obținem $b = 2$, $n = 1$. Pentru $a = 1$, obținem $b = 7$, $n = 1$. Pentru $a = \overline{2,4}$, nu avem soluții. Pentru $a = 5$, obținem $b = 7$, $n = 4$ și $6^5 = 7776$.	4p
Dacă $a \geq 6$, avem $b = 7$. Numărul 6^a se divide cu 2^6 , dar numărul $\overline{\dots 77776}$ nu se divide cu 2^6 , deci nu mai găsim soluții.	3p

Subiectul 3.

Se consideră numărul natural prim p . Numărul natural n este divizibil cu p^3 dar nu este divizibil cu p^4 . Numerele d_1, d_2, \dots, d_k , $k \in \mathbb{N}^*$, sunt divizorii numărului n și $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$.

- Determinați cea mai mică valoare posibilă a lui k ;
- Arătați că numărul $P = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_k$ este pătrat perfect.

Colecția Gazeta Matematică, Seria B, prelucrare

Detalii rezolvare	Barem asociat
<p>a) Dacă descompunerea numărului n în factori primi este $n = p^3 \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_m^{a_m}$, numărul de divizori ai lui n este $k = 4 \cdot (a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \dots \cdot (a_m + 1)$. Cea mai mică valoare a lui k este 4 și se obține pentru $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$.</p>	3p
<p>b) Avem $d_i \cdot d_{k+1-i} = n$, $i = \overline{1, k}$, deci $P^2 = n^k$. Cum $k = 4q$, $q \in \mathbb{N}^*$, obținem $P^2 = n^{4q} = (n^{2q})^2$.</p>	3p
<p>Deducem că $P = n^{2q} = (n^q)^2$, deci P este pătrat perfect.</p>	1p

Subiectul 4.

Se consideră numerele naturale nenule m și n și un unghi alungit $\widehat{A_0OA_{m+n}}$. De aceeași parte a dreptei A_0A_{m+n} se consideră, în sensul mișcării acelor de ceasornic, semidreptele

$(OA_1, (OA_2, \dots, (OA_{m+n-1}$, care formează unghiurile $\widehat{A_0OA_1}, \widehat{A_1OA_2}, \widehat{A_2OA_3}, \dots, \widehat{A_{m+n-1}OA_{m+n}}$.

Se știe că un număr de m unghiuri dintre cele menționate au măsura egală cu 3° , iar celelalte n unghiuri au măsura egală cu 5° .

- Determinați cea mai mică valoare a sumei $m + n$;
- Dacă $m = 5$, arătați că există $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, m + n\}$ astfel încât $m(\widehat{A_iOA_j}) = 30^\circ$.

prof. Mircea Fianu, București

Detalii rezolvare	Barem asociat
<p>a) Avem $m \cdot 3^\circ + n \cdot 5^\circ = 180^\circ$. Deducem că m este divizibil cu 5. Pentru ca numărul $m + n$ să fie minim trebuie ca m să fie minim.</p>	2p
<p>Pentru $m = 5$, obținem $n = 33$, deci valoarea minimă a sumei $m + n$ este 38.</p>	1p
<p>b) Cele 5 unghiuri de 3° determină cel mult 6 sectoare acoperite numai de unghiuri de 5°.</p>	2p
<p>Prin urmare, există un sector în care se află o secvență de cel puțin 6 unghiuri de 5° alăturate. Rezultă concluzia.</p>	2p