OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 23.02.2014 -

CLASA A VIII-A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Demonstraţi că dacă *a*, *b* şi *n* sunt numere naturale nenule astfel încât $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=n$, atunci numărul $A=\underbrace{\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+2}}}}}}_{2014 \text{ radicali}}$ este natural.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

Detalii rezolvare	Barem asociat
Ridicând la pătrat relaţia din ipoteză obţinem $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}=n^2-2\in\mathbb{N}$.	**2p**
Putem considera $(a,b)=1$. Fracţia $\frac{a^2+b^2}{ab}$ este ireductibilă , deci $a=b=1$.	**3p**
Obţinem $n=2$.	**1p**
Finalizare, $A=2\in\mathbb{N}$	**1p**

Subiectul 2. Se consideră expresia $E(a,b)=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{16ab}{a^2+b^2}$, unde *a* şi *b* sunt numere reale strict pozitive.

a) Arătaţi că numărul $E\left(\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1\right)$ este raţional;

b) Determinaţi cel mai mare număr real *n* pentru care inegalitatea $E(a,b)\geq n$ are loc, oricare ar fi numerele reale strict pozitive *a* şi *b*.

Prof. Traian Preda, Bucureşti

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $E\left(\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1\right)=36\frac{2}{3}\in\mathbb{Q}$.	**2p**
b) Inegalitatea din enunţ este echivalentă cu $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2-8\cdot\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}\geq n-10$. Adică $(a-b)^2\cdot\frac{\left(a^2+b^2\right)(a+b)^2-8a^2b^2}{a^2b^2\left(a^2+b^2\right)}\geq n-10$.	**2p**
Deoarece $a^2+b^2\geq 2ab$ şi $(a+b)^2\geq 4ab$, obţinem, prin înmulţire $\left(a^2+b^2\right)(a+b)^2\geq 8a^2b^2$. Deci $E(a,b)-10\geq 0$, oricare ar fi numerele reale strict	**2p**

pozitive a şi b.. Deducem că $n \geq 10$.	
Cum $E(a,a)=10$, $a>0$, rezultă că $n=10$.	**1p**

Subiectul 3. Se consideră triunghiul echilateral *ABC* şi triunghiul *BCD* situate în plane perpendiculare. Fie M mijlocul segmentului $[AD]$ şi G centrul de greutate al triunghiului *ABC*. Dacă $DG \perp (MBC)$, demonstraţi că triunghiul *BCD* este dreptunghic isoscel.

Prof. Mircea Fianu, Bucureşti

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Fie N mijlocul segmentului $[BC]$. Punctele A, G şi N sunt coliniare şi $AN \perp BC$ (1) Cum $DG \perp (MBC)$, rezultă că $DG \perp BC$ (2) Din (1) şi (2) deducem că $BC \perp (AND)$, deci dreapta DN este mediatoare a segmentului $[BC]$, prin urmare, triunghiul BDC este isoscel cu $DB = DC$.	**2p**
În triunghiul dreptunghic AND avem $NM = \frac{AD}{2}$ (3). Dacă P este mijlocul segmentului $[AG]$ şi $\{R\} = DG \cap MN$, atunci $[PM]$ este linie mijlocie în triunghiul ADG, de unde deducem că $[GR]$ este linie mijlocie în triunghiul NPM, deci R este mijlocul segmentului $[MN]$. Cum $DR \perp MN$, rezultă că triunghiul DMN este isoscel cu $DN = DM = \frac{AD}{2}$ (4) Din (3) şi (4) obţinem că triunghiul MDN este echilateral.	**3p**
Triunghiurile ANC şi AND sunt congruente (C. U.), deci $ND = NC = \frac{BC}{2}$, adică triunghiul DBC este dreptunghic în D.	**2p**

Subiectul 4. Arătaţi că, dacă a, b şi c sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza a, atunci

a) $\frac{a}{\sqrt{bc}} \geq \sqrt{2}$;

b) $\frac{(a-b)(a-c)}{(a+b)(a+c)} \leq 17 - 12\sqrt{2}$.

Prof. Valerian Vlăescu, Dorohoi

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Prin ridicare la pătrat, inegalitatea devine $\frac{a^2}{bc} \geq 2$, sau $a^2 \geq 2bc$, adică $b^2 + c^2 \geq 2bc$. Ultima inegalitate este adevărată deoarece este echivalentă cu $(b-c)^2 \geq 0$.	**2p**
b) $a^2 = b^2 + c^2$, obţinem $a - b = \frac{c^2}{a+b}$ şi $a - c = \frac{b^2}{a+b}$. Inegalitatea din enunţ devine $\frac{b^2c^2}{(a+b)^2(a+c)^2} \leq (3-2\sqrt{2})^2$, adică $\frac{bc}{(a+b)(a+c)} \leq 3 - 2\sqrt{2} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$.	**2p**
Inegalitate echivalentă cu $\frac{1}{\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{a}{c}+1\right)} \leq \frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}$ sau $\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{a}{c}+1\right) \geq \left(\sqrt{2}+1\right)^2$. Avem $\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{a}{c}+1\right) = \frac{a^2}{bc} + \frac{a}{bc}(b+c) + 1 \geq \frac{a^2}{bc} + \frac{2a}{\sqrt{bc}} + 1 = \left(\frac{a}{\sqrt{bc}}+1\right)^2 \geq \left(\sqrt{2}+1\right)^2$	**3p**