

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 23.02.2014 -****CLASA A VIII-A**

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

1. Demonstrați că dacă a, b și n sunt numere naturale nenule astfel încât $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = n$, atunci

numărul $A = \underbrace{\sqrt{n + \sqrt{n + \dots + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + 2}}}}}}_{2014 \text{ radicali}}$ este natural.

2. Se consideră expresia $E(a, b) = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{16ab}{a^2 + b^2}$, unde a și b sunt numere reale strict pozitive.

a) Arătați că numărul $E(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$ este rațional;

b) Determinați cel mai mare număr real n pentru care inegalitatea $E(a, b) \geq n$ are loc, oricare ar fi numerele reale strict pozitive a și b .

3. Se consideră triunghiul echilateral ABC și triunghiul BCD situate în plane perpendiculare. Fie M mijlocul segmentului $[AD]$ și G centrul de greutate al triunghiului ABC . Dacă $DG \perp (MBC)$, demonstrați că triunghiul BCD este dreptunghic isoscel.

4. Arătați că, dacă a, b și c sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza a , atunci

a) $\frac{a}{\sqrt{bc}} \geq \sqrt{2}$;

b) $\frac{(a-b)(a-c)}{(a+b)(a+c)} \leq 17 - 12\sqrt{2}$.