



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
- ETAPA PE SECTOR, 23.02.2014 -**

**CLASA A VII-A  
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi.  
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

**Subiectul 1.** Determinați toate perechile de numere naturale  $(a, b)$  care verifică egalitatea

$$a^2b^2 - 11a^2 - 11b^2 = 1893.$$

*Prof. Eugen Predoiu, Călărași*

Detalii rezolvare	Barem asociat
Egalitatea din enunț este echivalentă cu $(a^2 - 11)(b^2 - 11) = 2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$	<b>3p</b>
Deci $a^2 - 11 \in \{1, 2, 19, 53, 38, 106, 1007, 2014\}$	<b>2p</b>
Convin numai $a^2 - 11 = 38$ și $b^2 - 11 = 53$ sau $b^2 - 11 = 38$ și $a^2 - 11 = 53$ , de unde obținem $(a, b) \in \{(7, 8), (8, 7)\}$ .	<b>2p</b>

**Subiectul 2.** Se consideră trapezul  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) în care  $\{O\} = AC \cap BD$ . Punctele  $M$  și  $N$  sunt situate pe segmentele  $(AO)$  și respectiv  $(BO)$ , iar punctele  $P$  și  $Q$  sunt situate pe segmentele  $(AD)$  și respectiv  $(BC)$ , astfel încât  $MP \perp AD$ , iar  $NQ \perp BC$ .

a) Demonstrați că  $S_{OAD} = S_{OBC}$ ;

b) Demonstrați că  $MN \parallel AB$  dacă și numai dacă  $\frac{AD}{BC} = \frac{NQ}{PM}$ .

*Prof. Traian Preda, București*

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Avem $S_{DAB} = S_{CAB}$ . Scădem din ambii membri ai egalității $S_{AOB}$ și obținem $S_{OAD} = S_{OBC}$ .	<b>2p</b>
b) $MN \parallel AB$ este echivalent, conform teoremei lui Thales, cu $\frac{OM}{MA} = \frac{ON}{NB}$ . Echivalent cu $\frac{S_{DMO}}{S_{DMA}} = \frac{S_{CNO}}{S_{CNB}}$ .	<b>2p</b>
Echivalent cu $\frac{S_{DMO} + S_{DMA}}{S_{DMA}} = \frac{S_{CNO} + S_{CNB}}{S_{CNB}}$ , adică $\frac{S_{DOA}}{S_{DMA}} = \frac{S_{COB}}{S_{CNB}}$ . Echivalent cu $S_{DMA} = S_{CNB}$ .	<b>2p</b>
Echivalent cu $\frac{AD \cdot MP}{2} = \frac{BC \cdot NQ}{2}$ , echivalent cu $\frac{AD}{BC} = \frac{NQ}{PM}$	<b>1p</b>

**Subiectul 3.** Se consideră numerele întregi nenule  $a, b$  și  $c$  care verifică egalitatea

$$a+b+c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

a) Arătați că  $|a+b+c| \leq 3$ ;

b) Arătați că cel puțin unul dintre numerele  $a, b$  sau  $c$  are modulul egal cu 1.

*Prof. Lucian Petrescu, Tulcea, Cristian Mangra, București*

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Din ipoteză, rezultă $ a+b+c  = \left  \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right  \leq \left  \frac{1}{a} \right  + \left  \frac{1}{b} \right  + \left  \frac{1}{c} \right  \leq 1+1+1=3$ . Egalitatea se obține pentru $(a,b,c) \in \{(1,1,1), (-1,-1,-1)\}$	2p
b) Presupunem că $ a  \geq 2,  b  \geq 2,  c  \geq 2$ , atunci $1 \leq  a+b+c  = \left  \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right  \leq \left  \frac{1}{a} \right  + \left  \frac{1}{b} \right  + \left  \frac{1}{c} \right  \leq \frac{3}{2}$ Obținem $ a+b+c =1$	2p
Dacă toate numerele $a, b$ și $c$ sunt impare, atunci $1 =  a+b+c  \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ , deci $ a = b = c =3$ . Cum $a+b+c$ este multiplu de 3, rezultă că $ a+b+c  \neq 1$	1p
Dacă, de exemplu numerele $a$ și $b$ sunt pare și $c$ este impar, atunci $1 = \left  \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right  = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$ , dar $2+3+6=11 \neq 1$ . Rezultă că, cel puțin unul dintre numerele $a, b, c$ are modulul egal cu 1.	1p
Un triplet care verifică egalitatea din enunț este, de exemplu $(a,b,c) = (1, 2, -2)$	1p

**Subiectul 4.** Pe ipotenuza triunghiului dreptunghic  $ABC$ ,  $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$ , se consideră punctele  $D$  și  $E$  astfel încât  $BD = AB$  și  $CE = AC$ . Punctele  $F$  și  $G$  sunt situate pe laturile  $(AB)$ , respectiv  $(AC)$  astfel încât  $BF = BE$  și  $CG = CD$ . Dacă  $I$  este centrul cercului înscris în triunghiul  $ABC$ , demonstrați că punctele  $F, I$  și  $G$  sunt coliniare.

*Prof. Gabriel Vrînceanu, Mircea Fianu, București*

Detalii rezolvare	Barem asociat
Deoarece triunghiul $BFE$ este isoscel și ( $BI$ este bisectoarea unghiului $\widehat{EBF}$ , rezultă că dreapta $BI$ este mediatoarea segmentului $[EF]$ (1). Cum triunghiul $CAE$ este isoscel, iar ( $CI$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ACE}$ , rezultă că dreapta $CI$ este mediatoarea segmentului $[EA]$ (2). Din (1) și (2), rezultă că $I$ este centrul cercului circumscris triunghiului $AFE$ , deci $I$ este situat pe mediatoarea segmentului $[FA]$ (3).	2p
Analog, obținem că $I$ este centrul cercului circumscris triunghiului $AGD$ , deci $I$ este situat pe mediatoarea segmentului $[GA]$ (4).	2p
Din (3) și (4) deducem că $I$ este centrul cercului circumscris triunghiului $AGF$ .	1p
Cum triunghiul $AFG$ este dreptunghic în $A$ , rezultă că $I$ este mijlocul ipotenuzei $[FG]$ , deci punctele $F, I$ și $G$ sunt coliniare.	2p