INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 23.02.2014 -

CLASA A VI-A
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Arătați că există un singur număr prim de trei cifre cu produsul cifrelor egal cu 70.

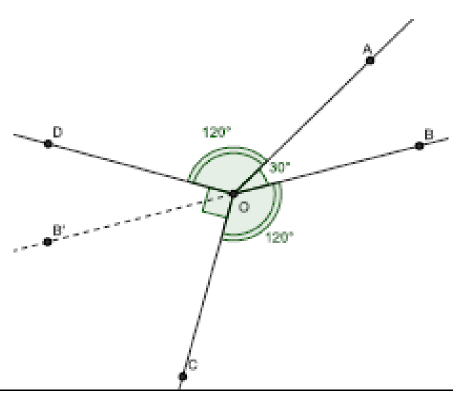
***

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Descompunerea în factori a lui 70 este $2\cdot 5\cdot 7$ şi putem forma numerele $725, 752, 527, 572, 275, 257$	**2 p**
Numerele care au ultima cifră 5 nu sunt prime; se divid cu 5, iar numerele care au ultima cifră 2 nu sunt prime pentru că se divid cu 2.	**2 p**
$527=17\cdot 31$, aşadar nu este număr prim	**2 p**
257 este număr prim, se verifică prin împărțiri succesive la 7, 11, 13 şi 17.	**1 p**

Subiectul 2. Se consideră unghiurile proprii $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD, \sphericalangle DOA$ cu interioarele disjuncte, formate în jurul punctului O. Măsura suplementului unghiului $\sphericalangle AOB$ este egală cu măsura unghiului $\sphericalangle AOC$ precum şi cu măsura unghiului $\sphericalangle BOD$. Măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$ sunt exprimate, în grade, prin două numere naturale care au cel mai mare divizor comun egal cu 30.

Determinați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD, \sphericalangle DOA$.

Prof. Victor Nicolae, Petre Simion, Bucureşti

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
 Notăm $m(\sphericalangle AOB)=a$ şi $m(\sphericalangle BOC)=b$. Cum $(a,b)=30$, rezultă că $a=30x, b=30y$ $x,y\in\mathbb{N}^*$, $(x,y)=1$.	**1 p**
Dacă $\sphericalangle AOC$ are ca suplement $\sphericalangle AOB$, atunci $m(\sphericalangle AOC)+a=180^0$. Dar $m(\sphericalangle AOC)=a+b$ şi atunci $2a+b=180$ sau $60x+30y=180$, rezultă $2x+y=6$.	**2 p**

Cum y este număr par nenul, implică $y \in \{2,4\}$. Dacă $y=2$, atunci $x=2$ şi numerele nu sunt prime între ele. Dacă $y=4$, atunci $x=1$. Rezultă $a=30^0, b=120^0$.	**2 p**
Avem $m(\sphericalangle AOB)=30^0$, $m(\sphericalangle BOC)=120^0$. Din $m(\sphericalangle BOD)+a=180^0 \Rightarrow m(\sphericalangle BOD)=150^0 \Rightarrow m(\sphericalangle AOD)=120^0$. Din suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct rezultă $m(\sphericalangle COD)=90^0$.	**2 p**

Subiectul 3. Dacă numerele naturale x, y, z verifică egalitatea $67x+52y=15z$, arătaţi că numărul $(x+y)(y+z)(z+x)$ se divide cu 2010.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$2010=2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$. Vom arăta că numărul $(x+y)(y+z)(z+x)$ se divide cu 2, cu 15 şi cu 67.	**1 p**
Relația dată se mai scrie $67x+67y=15y+15z$ sau $67(x+y)=15(y+z)$	**2 p**
Cum 15 este relativ prim cu 67, rezultă 15 divide pe $x+y$, aşadar $15 \mid (x+y)(y+z)(z+x)$ (1) Cum 67 este relativ prim cu 15 rezultă 67 divide pe $y+z$, aşadar $67 \mid (x+y)(y+z)(z+x)$ (2)	**2 p**
Dacă x, y, z sunt numere naturale atunci cel puțin două au aceeaşi paritate şi prin urmare, cel puțin una din sumele $x+y$, $y+z$, $z+x$ se divide cu 2, de unde $2 \mid (x+y)(y+z)(z+x)$ (3)	**1 p**
Din (1), (2) şi (3) rezultă $2\cdot 15\cdot 67 \mid (x+y)(y+z)(z+x)$, adică $2010 \mid (x+y)(y+z)(z+x)$	**1 p**

Subiectul 4. Notăm cu *S* mulțimea numerelor de cinci cifre distincte formate cu elementele mulțimii {1, 2, 3, 7, 8}.

a) Dacă *p* este un element oarecare al mulțimii *S*, arătați că numerele $5p, 3p$ şi $7p$ **nu** sunt elemente ale mulțimii *S*.

b) Determinați toate elementele $m \in S$ care au proprietatea că $4m \in S$.

Prof.Gheorghe Rotariu, Dorohoi, Botoşani

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Dacă $p \in S$, atunci $U(5p) \in \{0,5\}$. Deci $5p \notin S$	**1 p**
Dacă $p \in S$, $p=9k+3,\ k \in \mathbb{N}$. Dar $3p$ este multiplu de 9, deci $3p \notin S$.	**1 p**
Dacă $p \in S$, $p=\overline{abcde}$ şi $7p \in S$, atunci $a=1$ şi $b=2$. Se obține că $7\cdot\overline{12cde} \notin S$.	**1 p**
b) Dacă $m \in S$, $m=\overline{abcde}$ şi $4m \in S$, atunci $a \in \{1,2\}$.	**2 p**
Dacă $a=1$, atunci $b \in \{7,8\}$ şi se obține $m=17832$.	**1p**
Dacă $a=2$, atunci $b=1$ şi se obține $m=21783$.	**1p**