OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 23.02.2014 -

CLASA A V-A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Determinaţi numerele $\overline{ab}$ ştiind că împărţind numărul $\overline{ab5}$ la numărul $\overline{ba}$ obţinem câtul 5 şi restul 25.

Prof. Cristian Mangra, Bucureşti

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Din teorema împărţirii cu rest avem $\overline{ab5} = 5 \cdot \overline{ba} + 25$, cu $\overline{ba} > 25$.	**2 p**
Folosind scrierea în baza 10 obţinem $19 \cdot a = 8 \cdot b + 4$.	**2 p**
Deoarece numărul din membrul drept se divide cu 4 deducem că $a \in \{4, 8\}$.	**2 p**
Pentru $a = 4$, obţinem $b = 9$ şi numărul căutat este 49. Pentru $a = 8$ nu avem soluţie.	**1 p**

Subiectul 2.

a) Determinaţi toate perechile de numere naturale (n, p) care verifică egalitatea

$(n+1)(n+2p) = 1+2+3+4$;

b) Determinaţi câte perechi de numere naturale (n, p) care verifică egalitatea

$(n+1)(n+2p) = 1+2+3+...+2014$.

Prof. Ion Cicu, Bucureşti

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Avem $(n+1)(n+2p) = 10$, deci $n+1$ este divizor al lui 10, adică $n+1 \in \{1,2,5,10\}$	**1p**
Obţinem $n \in \{0,1,4,9\}$. Convin perechile $n = 0,\ p = 5$ şi $n = 1,\ p = 2$.	**2p**
b) Răspuns: 0 perechi	
Avem $1+2+3+...+2014 = 1007 \cdot 2015$ care este număr impar.	**1p**
Numerele $n+1$ şi $n+2p$ au parităţi diferite deoarece 1 este impar, iar $2p$ este par. Prin urmare, numărul $(n+1)(n+2p)$ este par.	**2p**
În concluzie $(n+1)(n+2p) \neq 1+2+3+...+2014$, oricare ar fi numerele naturale n şi p.	**1p**

Subiectul 3. Se consideră numărul $n = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{99...99}_{2014\ cifre} + 2014$.

a) Arătaţi că numărul n este divizibil cu 10;
b) Determinaţi câtul şi restul împărţirii numărului n la 111.

Prof. Aurica Pîrvescu, Botoşani

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Numărul n are 2014 termeni formaţi numai cu cifra 9. Vom scrie termenul 2014 ca o sumă formată din 2014 de 1. Avem $n = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{99...99}_{2014\ cifre} + \underbrace{1 + 1 + 1 + ... + 1}_{2014\ termeni} = (9+1) + (99+1) + (999+1) + ... + (99...99+1)$ sau $n = 10 + 100 + 1000 + ... + 1\underbrace{00...00}_{2014\ cifre} = \underbrace{11...11}_{2014\ cifre}0$. Cum ultima cifră este 0, numărul este divizibil cu 10	**3p**
b) Vom scrie $n = 111 \cdot 10^{2012} + 111 \cdot 10^{2009} + ... + 111 \cdot 10^{2} + 10 =$ $= 111 \cdot \left(1 \cdot 10^{2012} + 1 \cdot 10^{2009} + ... + 1 \cdot 10^{2}\right) + 10$ Câtul este $\underbrace{\underbrace{100}\underbrace{100}...\underbrace{100}}_{671\ \text{grupe}}$, iar restul este 10.	**2 p** **2 p**

Subiectul 4. Se consideră mulţimea A care are ca elemente numere naturale scrise cu cinci cifre diferite care aparţin mulţimii $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

a) Determinaţi câte numere din mulţimea A au prima cifră 1 şi ultima cifră 3;
b) Determinaţi câte elemente conţine mulţimea A;
c) Calculaţi suma tuturor elementelor din mulţimea A.

Prof.Marius Perianu, Slatina

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Numerele au forma $\overline{1abc3}$. Cifra a poate lua 3 valori, cifra b poate lua 2 valori, iar cifra c o valoare. Sunt $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ numere	**2 p**
b) Numerele au forma $\overline{abcde}$. Cifra a poate lua 5 valori, cifra b poate lua 4 valori, cifra c poate lua 3 valori, cifra d poate lua 2 valori, iar cifra e o valoare. Sunt $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ de numere.	**3 p**
c) Fiecare cifră apare, pe fiecare poziţie, de 24 de ori şi atunci suma numerelor are forma $S = 24 \cdot (1+3+5+7+9) \cdot 10^4 + 24 \cdot (1+3+5+7+9) \cdot 10^3 + 24 \cdot (1+3+5+7+9) \cdot 10^2 +$ $+ 24 \cdot (1+3+5+7+9) \cdot 10 + 24 \cdot (1+3+5+7+9) = 24 \cdot 25 \cdot 11111 = 6666600$	**2 p**