OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 -

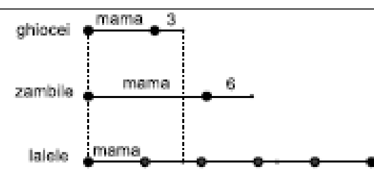
CLASA A V-A

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1.
Mama lui Ionel a cumpărat bulbi de ghiocei, de zambile şi de lalele, cel puţin câte unul din fiecare fel de flori. Tatăl lui Ionel a mai cumpărat 3 bulbi de ghiocei, 6 bulbi de zambile, iar bulbi de lalele de 4 ori mai mulţi decât a cumpărat mama. Ionel observă că numărul bulbilor de lalele este de trei ori mai mare decât numărul bulbilor de ghiocei şi, în total, sunt 30 de bulbi de flori.
Câţi bulbi din fiecare fel de flori au cumpărat, în total, părinţii lui Ionel?

Prof. Victor Nicolae, Simion Petre, Bucureşti

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Notăm cu *g*, *z* şi respectiv *l* numărul de bulbi de ghiocei, zambile şi de lalele cumpăraţi de mamă. Tatăl a cumpărat $4l$ bulbi de lalele. (Vezi figura alăturată!)  Numărul total de bulbi de ghiocei este egal cu $g+3$, numărul total de bulbi de zambile este egal cu $z+6$, iar numărul total de bulbi de lalele este egal cu $5l$.	**2p**
Dar $5l=(g+3)\cdot 3=3g+9$, deci numărul total de bulbi de flori este $(g+3)+(z+6)+(3g+9)=30$. Prin urmare, $4g+z=12$.	**1p**
Înseamnă că *z* se divide cu 4. Deoarece *z* nu este egal cu 0, rezultă că $z\in\{4;8\}$	**1p**
Dacă $z=8$, atunci $g=1$ şi numărul total de bulbi de lalele ar fi egal cu $5l==3\cdot 1+9=12$, fals.	**1p**
Deci $z=4, g=2$ şi $5l=3\cdot 2+9=15$, adică $l=3$	**1p**
Numărul total de bulbi de ghiocei este egal cu 5, numărul total de bulbi de zambile este egal cu 10, numărul total de bulbi de lalele este egal cu 15.	**1p**

Subiectul 2.
Se consideră toate împărţirile posibile în care deîmpărţitul este cu 2013 mai mare decât restul.
a) Determinaţi numărul de valori pe care le poate lua deîmpărţitul;
b) Arătaţi că suma tuturor valorilor pe care le poate lua deîmpărţitul este divizibilă cu 2013.

Prof. Victor Nicolae, Simion Petre , Bucureşti

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Notăm cu *D*, *I*, *C* şi *R*, deîmpărţitul, împărţitorul, câtul şi respectiv restul fiecărei împărţiri. Avem $D=C\cdot I+R,\ 0\le R<I$ şi $D=2013+R$, deci $I\cdot C=2013$.	**2p**

Deducem că $1 \le I \le 2013$.	
Prin urmare, $R \in \{0;1;2;...;2012\}$.	**2p**
a) Rezultă că $D \in \{2013;2014;...;4025\}$, deci deîmpărțitul poate lua 2013 valori.	**1p**
b) $S = 2013 + (2013+1) + ... + (2013+2012) = 2013^2 + 2012 \cdot 2013 : 2 = 2013 \cdot 3019$ care este număr divizibil cu 2013.	**2p**

Subiectul 3.

Determinați câte numere naturale de forma $\overline{xyz}$ au proprietatea că numărul $\overline{xyz} - \overline{xy} - z$ este cub perfect.

Colecția Gazeta Matematică, seria B

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Avem $\overline{xyz} - \overline{xy} - z = 10 \cdot \overline{xy} + z - \overline{xy} - z = 9 \cdot \overline{xy}$.	**1p**
Deoarece $9 = 3^2$, rezultă că $\overline{xy} = 3^{3k+1} \cdot m^3 = 3 \cdot \left(3^k \cdot m\right)^3$, unde $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^*$.	**2p**
Cum $10 \le \overline{xy} = 3 \cdot \left(3^k \cdot m\right)^3 \le 99$, rezultă că $4 \le \left(3^k \cdot m\right)^3 < 33$, deci $1 < 3^k \cdot m \le 3$. Obținem $k = 0, m = 2$, cu $\overline{xy} = 24$ sau $k = 0, m = 3$ cu $\overline{xy} = 81$. Pentru $k = 0, m = 1$ avem $\overline{xy} = 81$.	**3p**
Avem $\overline{xyz} \in \left\{\overline{24z} \,\middle|\, z = \overline{0,9}\right\} \cup \left\{\overline{81z} \,\middle|\, z = \overline{0,9}\right\}$, în total 20 de numere.	**1p**

Subiectul 4.

Se consideră mulțimile $A = \{a, b, c, d\} \subset \mathbb{N}$ şi $S = \{s \in \mathbb{N} \mid s = x + y, x \in A, y \in A, x \ne y\}$.

Se ştie că $S = \{82, 96, 104, 112, 126\}$.

a) Calculați suma elementelor din mulțimea *A*;

b) Determinați elementele mulțimii *A*.

prof. Mircea Fianu, Bucureşti

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Putem considera $a < b < c < d$.	**1p**
a) Atunci $a + b$ este cel mai mic număr din *S*, deci $a + b = 82$, iar $c + d$ este cel mai mare număr din *S*, deci $c + d = 126$.	**1p**
Suma elementelor din *A* este egală cu $(a+b) + (c+d) = 82 + 126 = 208$.	**1p**
b) Deoarece adunând elementele diferite din *A* două câte două obținem 6 sume, iar mulțimea *S* are 5 elemente înseamnă că două dintre cele 6 sume sunt egale.	**1p**
Cum $a + b < a + c < a + d$ şi $b + c < b + d < c + d$, obținem $a + d = b + c = 104$, $a + c = 96$ şi $b + d = 112$.	**1p**
În final, $a = 37$, $b = 45$, $c = 59$, $d = 67$.	**2p**