

unic $y_x \in [0,1]$, astfel încât $f(x) - f(y_x) = a$. Dacă $y_x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ atunci $a \in A$. Dacă $y_x \in \mathbf{Q}$, pentru orice $x \in I$ definim $g: E \rightarrow \mathbf{Q}$ prin $g(x) = y_x$ și funcția g fiind injectivă ajungem la o contradicție. Rezultă deci $A = (-1, 1)$.

Clasa a XII-a

1. Se consideră un inel A .

a) Să se arate că mulțimea $Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa, \text{ pentru orice } x \in A\}$ este subinel al inelului A .

b) Să se arate că, dacă orice subinel comutativ al lui A este corp, atunci A este corp.

(Se numește subinel o submulțime $B \subset A$ care verifică următoarele condiții: $x, y \in B$ implică $xy, x - y \in B$ și $1 \in B$, unde 1 este elementul neutru al înmulțirii din A).

Ion Savu

Soluție: a) Fie $a, b \in Z(A)$; $(a-b)x = ax - bx = xa - xb = x(a-b)$, și $(ab)x = a(bx) = x(ab)$, $\forall x \in A$, deci $a-b \in Z(A)$ și $ab \in Z(A)$. Cum $1 \in Z(A)$, rezultă că $Z(A)$ este subinel.

b) Fie $a \in A - \{0\}$ și $B \subset Z(A)$ un subinel al lui A . Considerăm $D = \{f(a) \mid f \in B[X]\}$. Se verifică ușor că D este subinel comutativ al lui A și atunci rezultă că D este un corp. Cum $a \in D$, rezultă că a este inversabil. De aici obținem că A este corp.

2. Fie $f: [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$, integrabilă, astfel încât:

$$0 < \left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq 1.$$

Să se demonstreze că există $x_1 \neq x_2, x_1, x_2 \in [0,1]$, astfel încât:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = (x_1 - x_2)^{2002}.$$

Radu Gologan

Soluție: Fie $F: [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Cazul 1. Dacă, pentru orice $x_1 \neq x_2 \in [0,1]$, avem $|F(x_1) - F(x_2)| \geq |x_1 - x_2|^{2002}$, atunci $x_1 = 1, x_2 = 0$ ($1 \geq \left| \int_0^1 f(t) dt \right| \geq 1^{2002}$) dau o soluție.

Cazul 2. Dacă, pentru orice $x_1 \neq x_2 \in [0,1]$, avem $|F(x_1) - F(x_2)| \leq |x_1 - x_2|^{2002}$, atunci rezultă F derivabilă în orice $x \in [0,1]$ și $F'(x) = 0$, ceea ce contrazică $0 < |F(1) - F(0)|$.

Există deci

$$0 \leq a < b \leq 1 \text{ cu } |F(b) - F(a)| > |b - a|^{2002}$$

și

$$0 \leq c < d \leq 1 \text{ cu } |F(d) - F(c)| > |d - c|^{2002}.$$

Aplicând Darboux funcției $g(t) = |F(y_t) - F(x_t)| - |y_t - x_t|^{2002}$ cu $0 \leq x_t = (1-t)a + tb < y_t = (1-t)c + td \leq 1$ obținem rezultatul.

3. Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție continuă și mărginită. Dacă

$$\int_x^{x+1} f(t) dt = \int_0^x f(t) dt, \text{ pentru orice } x \in \mathbf{R},$$

să se arate că f este constantă.

Mihai Piticari

Soluție: Notăm $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Atunci $x(F(x+1) - F(x)) = f(x)$ deci $\frac{F(x)}{x} = \frac{F(x+1)}{x+1}$, $\forall x \in (0, \infty)$. Atunci

$p(x) = \frac{F(x)}{x}$, $p: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, este derivabilă și periodică (cu perioada 1). Din $F(x) = xp(x)$ obținem

$f(x) = p(x) + xp'(x)$.

p' are perioada 1; dacă $\exists x_0 > 0$ cu $p'(x_0) \neq 0$, atunci $f(x_0+n) = p(x_0+n) + (x_0+n)p'(x_0+n) = p(x_0) + (x_0+n)p'(x_0)$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0+n)$ infinită, contradicție. Deci $p(x) = k$, $\forall x \in (0, \infty)$, adică $f(x) = k$, $\forall x \in (0, \infty)$.

Cazul $x \in (-\infty, 0)$ de tratează analog; prin continuitate, $f(x) = k$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

4. Fie K un corp cu $q = p^n$ elemente, cu p prim și $n \geq 2$. Pentru $a \in K$, arbitrar, se definește polinomul $f_a = X^q - X + a$. Să se arate că:

- f_a divide polinomul $f = (X^p - X)^q - (X^p - X)$;
 - f_a are cel puțin p^{n-1} divizori ireductibili în $K[X]$, neasociați în divizibilitate.
- (Se poate folosi rezultatul: *orice corp finit este comutativ*).

Marian Andronache

Soluție: a) Deoarece $p \cdot 1 = 0$, rezultă $(a+b)^p = a^p + b^p$ pentru orice $a, b \in K$. Cum $(X^p - X)^{p^n} - (X^p - X) = X^{p^{n+1}} - X^{p^n} - X^p + X = (X^{p^n} - X + 1)^p - (X^{p^n} - X + 1)$, rezultă concluzia.

b) $f_0 = X^{p^n} - X = \prod_{b \in K} (X - b)$, deci f_0 are p^n divizori ireductibili neasociați în divizibilitate.

Pentru $a \in K^*$, cum $f_a(aX) = a^q X^q - aX + a = af_1(X)$, este suficient să verificăm proprietatea pentru f_1 . Fie $g = X^p - X$. Din a) și din formula de descompunere a lui f_0 avem $f_1 = (f_1, g^q - g) = (f_1, \prod_{b \in K} (g - b) = \prod_{b \in K} (f, g - b)$. Cum $\text{gr} f_1 = p^n$ și $\text{gr}(f_1, g - b) \leq p$, pentru $b \in K$, atunci cel puțin p^{n-1} dintre polinoamele $(f, g - b)$ cu $b \in K$ au gradul ≥ 1 . Cum aceste polinoame sunt relativ prime două câte două și fiecare are în descompunerea sa cel puțin un factor ireductibil, rezultă concluzia.

**PRIMUL TEST DE SELECȚIE
PENTRU A 6-A OLIMPIADĂ BALCANICĂ DE MATEMATICĂ
PENTRU JUNIORI
Rm. Vâlcea, 21 martie, 2002**

- Pentru orice număr natural $n \geq 1$, se notează $f(n) = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$.