Clasa a XI-a

1. În reperul ortonormat xOy se consideră hiperbola

$$\Gamma=\left\{M(x,y)\in\mathbf{R}^2\,\middle|\,\frac{x^2}{4}-y^2=1\right\}.$$

şi o conică Γ' disjunctă de Γ. Notăm cu $n(\Gamma,\Gamma')$ numărul maxim de perechi de puncte $(A,A')\in\Gamma\times\Gamma'$ pentru care $AA'\le BB'$, oricare ar fi $(B,B')\in\Gamma\times\Gamma'$. Pentru fiecare $p\in\{0,1,2,4\}$, să se scrie ecuaţia unei conice Γ' pentru care $n(\Gamma,\Gamma')=p$. Justificaţi răspunsul.
(Prin conică înţelegem: cerc, elipsă, hiperbolă sau parabolă).

Barbu Berceanu

Soluţie: *Cazul p=0*. Fie Γ' o altă hiperbolă având aceleaşi asimptote; de exemplu $\Gamma=\left\{M(x,y)\in\mathbf{R}^2\,\middle|\,\frac{x^2}{4}-y^2=2\right\}$. Atunci $B'\left(n,\sqrt{\frac{n^2}{4}-2}\right)\in\Gamma'$ şi $B\in\left(n,\sqrt{\frac{n^2}{4}-1}\right)\in\Gamma$, $(\forall)\ n\ge2$, iar

$$BB'=\sqrt{\frac{n^2}{4}-1}-\sqrt{\frac{n^2}{4}-2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{n^2}{4}-1}+\sqrt{\frac{n^2}{4}-2}}.$$

Cum $BB'\to0$ când $n\to\infty$, iar Γ şi Γ' sunt disjuncte, rezultă $n(\Gamma,\Gamma')=0$.

Cazul p=1,2. Fie $\Gamma_1\Gamma_2$ cercurile de ecuaţie $x^2-x+y^2=0$, respectiv $x^2+y^2-1=0$ şi $A(2,0)$, $A_1(1,0)$, $B(-2,0)$, $B_1(-1,0)$. Pentru $(M,M_1)\in\Gamma\times\Gamma_1$ considerăm intersecţiile N,N_1 lui MM_1 cu tangentele t,t_1 în A,A_1 dacă $x_M>0$, respectiv au t',t'_1 tangentele în B,O dacă $x_M<0$. Obţinem $AA_1\le NN_1\le MM_1$ cu egalitate numai dacă $(A,A_1)=(B,B_1)$; rezultă $n(\Gamma,\Gamma_1)=1$. Analog $n(\Gamma,\Gamma_2)=2$.

Cazul p=4. Luâm Γ_4 hiperbolele $x^2-\frac{x^2}{4}+1=0$ dreptele $y=x\pm\sqrt{3}$ sunt tangente la Γ şi Γ_4 în $A\left(\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ şi $A_4\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$, iar AA_4 e perpendiculară pe aceste tangente. Pentru $(M,M_4)\in\Gamma\times\Gamma_4$ (cu $x_M>0$, $x_{M_4}>0$) avem $AA_4\le MM_4$ cu egalitate doar pentru $(M,M_4)=(A,A_4)$. Analog (rotind cu câte 90°) obţinem încă 3 perechi de puncte ce realizează minimul, deci $n(\Gamma,\Gamma_4)=4$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ care are limită în orice punct real şi nu are nici un punct de extrem local. Să se arate că:
a) f este continuă;
b) f este strict monotonă.

Mihai Piticari

Soluție: a) Fie $x_0 \in \mathbf{R}$. Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < f(x_0)$ atunci x_0 este punct de maxim local, dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > f(x_0)$, atunci x_0 e punct de minim local, ambele situații contrazicând ipoteza. Rămâne $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, așadar f e continuă.

b) Presupunem că există a<b cu f(a)=f(b), atunci ar exista un punct de extrem local $c \in (a,b)$, ceea ce nu se poate deci $f(a) \neq f(b)$. Rezultă că f e continuă și injectivă, deci strict monotonă.

3. Fie $A \in M_4(\mathbf{C})$ nenulă.

a) Dacă rang(A)=r<4, să se arate că există U, $V \in M_4(\mathbf{C})$, inversabile, astfel încât:

$$UAV = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

unde I_r este matricea unitate de ordin r.

b) Să se demonstreze că dacă A și A_2 au același rang k, atunci matricea A_n are rangul k, pentru orice $n \geq 3$.

M. Andronache, I. Savu

Soluție: a) Fie $i \neq j \in \{1,...,4\}$ și $a \in \mathbf{C}^*$.
Considerăm matricele P_{ij} obținute din I_4 prin permutarea liniilor i și j; $T_i(a)$ obținută din I_4 prin înmulțirea liniei i din I_4 cu a și $S_{ij}(a)$ obținută din I_4 prin adunarea la linia j a liniei i înmulțită cu a. Toate aceste matrice sunt inversabile.
Înmulțind matricea A la stânga cu aceste matrice vom obține transformările: permutarea liniilor i și j; înmujulțirea liniei i cu a, respectiv adunarea liniei j cu linia i înmulțită cu a. Dacă înmulțim matricea A la dreapta cu aceleași matrice se vor face aceleași transformări asupra coloanelor lui A. Prin înmulțirea convenabilă la stânga și la dreapta a matricei A cu matricele de mai sus, obținem forma din enunț. Matricele U și V reprezintă produsul matricelor anterioare înmulțite la stânga, respectiv la dreapta matricei A.

b) Dacă rang(A)=4 atunci $\det(A) \neq 0$ rezultă $\det(A^n) \neq 0$, deci $\text{rang}(A^n)=4$.

Fie k=rang(A)<4; atunci din punctul a) avem $UAV = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ cu U și V inversabile. Cum $\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = C \cdot D$ unde $C = \begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix}$ și $D = (I_k \quad 0)$, iar $A = U^{-1} C \cdot D V^{-1}$ rezultă A=EF unde $E = U^{-1} \cdot C$ și $F = D \cdot V^{-1}$, ambele având rangul k.

Din $A^2 = EFEF$ rezultă $\text{rang}(FE) \geq k$ și cum $\text{rang}(FE) \leq k$, avem rang(FE)=k iar $FE \in M_k(\mathbf{C})$.
Atunci $FA^nE = (FE)^{n+1}$ și de aici rezultă rang $(FA^nE)=k$, de unde rezultă $\text{rang}(A^n) \geq k$. Cum $\text{rang}(A^n) \leq k$ rezultă $\text{rang}(A^n)=k$ oricare ar fi $n \geq 3$.

4. Fie $f:[0,1] \to [0,1]$ continuă și bijectivă. Să se determine mulțimea:

$$A = \{f(x) - f(y) \mid x, y \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}\}.$$

(Se admite cunoscut rezultatul: *nu există funcție injectivă definită pe mulțimea numerelor iraționale ale unui interval, cu valori în* $\mathbf{Q}$).

Radu Gologan

Soluție: Evident $A \subset [-1,1]$. Cum f e continuă și injectivă, deci strict monotonă, avem $\{f(0), f(1)\} = \{0,1\}$ deci $-1, 1 \notin A$. Rezultă $A \subset (-1,1)$. Evident $0 \in A$ și dacă $a \in A$ atunci $-a \in A$. Resupunem f strict crescătoare și fie $a \in (0,1)$. Atunci a=f(b) cu $b \in (0,1)$. Pentru orice $x \in (b,1) \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) = E$ există un unic $y_x \in [0,1]$, astfel încât $f(x)-f(y_x)=a$. Dacă $y_x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ atunci $a \in A$. Dacă $y_x \in \mathbf{Q}$, pentru orice $x \in I$ definim $g:E \to \mathbf{Q}$ prin $g(x)=y_x$ şi funcţia g fiind injectivă ajungem la o contradicţie. Rezultă deci $A=(-1,1)$.

Clasa a XII-a

1. Se consideră un inel A.

a) Să se arate că mulţimea $Z(A)=\{a \in A | ax=xa$, pentru orice $x \in A\}$ este subinel al inelului A.

b) Să se arate că, dacă orice subinel comutativ al lui A este corp, atunci A este corp.

(Se numeşte subinel o submulţime $B \subset A$ care verifică următoarele condiţii: $x,y \in B$ implică xy, $x-y \in B$ şi $1 \in B$, unde 1 este elementul neutru al înmulţirii din A).

Ion Savu

Soluţie: a) Fie $a,b \in Z(A)$; $(a-b)x=ax-bx=xa-xb=x(a-b)$, şi $(ab)x=axb=x(ab)$, $\forall x \in A$, deci $a-b \in Z(A)$ şi $ab \in Z(A)$. Cum $1 \in Z(A)$, rezultă că Z(A) este subinel.

b) Fie $a \in A-\{0\}$ şi $B \subset Z(A)$ un subinel al lui A. Considerăm $D=\{f)a)|f \in B[X]\}$. Se verifică uşor că D este subinel comutativ al lui A şi atunci rezultă că D este un corp. Cum $a \in D$, rezultă că a este inversabil. De aici obţinem că A este corp.

2. Fie $f:[0,1] \to \mathbf{R}$, integrabilă, astfel încât:

$$0 < \left| \int_0^1 f(x)dx \right| \leq 1 .$$

Să se demonstreze că există $x_1 \neq x_2$, $x_1,x_2 \in [0,1]$, astfel încât:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = (x_1-x_2)^{2002}.$$

Radu Gologan

Soluţie: Fie $F:[0,1] \to \mathbf{R}$, $F(x)= \int_0^x f(t)dt$.

Cazul 1. Dacă, pentru orice $x_1 \neq x_2 \in [0,1]$, avem $|F(x_1)-F(x_2)| \geq |x_1-x_2|^{2002}$, atunci $x_1=1$, $x_2=0$ $(1 \geq |\int_0^1 f(t)dt| \geq 1^{2002})$ dau o soluţie.

Cazul 2. Dacă, pentru orice $x_1 \neq x_2 \in [0,1]$, avem $|F(x_1)-F(x_2)| \leq |x_1-x_2|^{2002}$, atunci rezultă F derivabila in orice $x \in [0,1]$ şi $F'(x)=0$, ceea ce contrazice $0<|F(1)-F(0)|$.

Există deci

$$0 \leq a < b \leq 1 \text{ cu } |F(b)-F(a)| > |b-a|^{2002}$$

şi

$$0 \leq c < d \leq 1 \text{ cu } |F(d)-F(c)| > |d-c|^{2002}.$$

Aplicând Darboux funcţiei $g(t)= |F(y_t)-F(x_t)| - |y_t-x_t|^{2002}$ cu $0 \leq x_t=(1-t)a+tb < y_t=(1-t)c+td \leq 1$ obţinem rezultatul.

3. Fie $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă şi mărginită. Dacă

$$x \int_x^{x+1} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt, \text{ pentru orice } x \in \mathbf{R},$$

să se arate că f este constantă.

Mihai Piticari