Cazul f(0)=1. Rezultă imediat $f(2y)=f(y)$ şi $f(3x)=f(x)$, $(\forall)$ $x,y\in\mathbf{N}$. Notând $a=f(1)$ obţinem $f(2)=a$, $f(3)=a$, $f(4)=a$, $f(5)=f(2\cdot1+3\cdot1)=a^2$ $f(25)=f(2\cdot5+3\cdot5)=f(5)\cdot f(5)=a^4$ şi $f(25)=f(2\cdot2+3\cdot7)=f(2)\cdot f(7)=af(2\cdot2+3\cdot1)=a^3$ adică $a^4=a^3$, deci $a=0$ sau $a=1$. De aici, ca în primul caz, se obţin funcţiile $f(x)=1$, $(\forall)$ $x\in\mathbf{N}$ şi $f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\in\mathbf{N}^*\end{cases}$.

Se verifică uşor că cele 3 funcţii găsite au proprietatea din enunţ.

Clasa a X-a

1. Fie X,Y,Z,T patru puncte distincte în plan. Spunem că segmentele [XY] şi [ZT] sunt *conectate*, dacă există un punct O în plan astfel încât triunghiurile OXY şi OZT să fie dreptunghice isoscele, cu unghiurile drepte în O. Fie ABCDEF un hexagon convex în care atât segmentele [AB] şi [CE], cât şi segmentele [BD] şi [EF] sunt *conectate*. Să se arate că punctele A,C,D şi F sunt vârfurile unui paralelogram şi că segmentele [BC] şi [AE] sunt *conectate*.

Bogdan Enescu

Soluţie: Dacă triunghiurile OXY şi OZT sunt orientate în sens invers trigonometric şi x,y,z,t sunt afixele punctelor X,Y,Z respectiv T, iar m afixul lui O, avem $x-m=i(y-m)$, $z-m=i(t-m)$. Rezultă $m(1-i)=x-iy=z-it$. Reciproc dacă $x-iy=z-it$, asfixul lui O este $m=\dfrac{x-iy}{1-i}$ şi triunghiurile OXY şi OZT vor fi dreptunghice în O, isoscele.

Fie a,b,c,d,e,f afixele vârfurilor hexagonului. Avem $a-ib=c-ie$, $b-id=e-if$. Înmulţind a doua egalitate cu i şi adunând-o termen cu termen la prima obţinem $a+d=c+f$, deci ACDF este paralelogram. Înmulţind prima egalitate cu i, ea se scrie $b-ic=e-ia$ deci [BC] şi [EA] sunt conectate.

Observaţie: Definiţia *conectării* a două segmente trebuie să includă şi faptul că triunghiurile sunt la fel orientate. Concluzia din enunţ trebuia aşadar să fie [BC] şi [EA] sunt conectate. Dacă se renunţă la această condiţie de orientare afirmaţia nu rămâne adevărată: hexagonul cu vârfurile de afixe $a=1$, $b=i$, $c=-1+5i$, $d=3+5i$, $e=5+i$, $f=3$ ar avea [AB] şi [CE] conectate (alegând ca O originea axelor), [BD] şi [EF] ar fi şi ele conectate(alegând O punctul de afix $(3{,}5+1{,}5i)$), dar A,C,D,F nu sunt vârfurile unui paralelogram, iar [BC] şi [EA] nu sunt conectate.

2. Să se determine polinoamele $f,g\in\mathbf{R}[X]$, ştiind că:

$$(x^2+x+1)\cdot f(x^2-x+1)=(x^2-x+1)\cdot g(x^2+x+1),$$

oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$.

Marcel Chiriţă

Soluţie: Presupunem că polinoamele f şi g satisfac relaţia din enunţ. Deoarece polinomul $(x^2+x+1)f(x^2-x+1)-(x^2-x+1)g(x^2+x+1)$, privit ca polinom în $C[X]$ se anulează pentru orice $x\in\mathbf{R}$ el este identic nul adică se anulează oricare ar fi $x\in\mathbf{C}$. Punând $x=\varepsilon$, unde $\varepsilon^2-\varepsilon+1=0$ obţinem $2\varepsilon f(0)=0\cdot g(2\varepsilon)$, deci $f(0)=0$. Punând $x=\varepsilon$, unde $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$ obţinem analog $g(0)=0$. Prin urmare $f(X)=Xf_1(X)$, $g(X)=Xg_1(X)$ şi egalitatea din enunţ devine

$$f_1(x^2-x+1)=g_1(x^2+x+1),\ \forall\ x\in\mathbf{R}.$$

Înlocuind x cu −x mai obţinem şi

$$f_1(x^2+x+1)=g_1(x^2-x+1).$$

Observăm că $(x+1)^2-(x+1)+1=x^2+x+1$ deci

$$g_1(x^2-x+1)=f_1(x^2+x+1)=f_1((x+1)^2-(x+1)+1)=g_1((x+1)^2+(x+1)+1)=g_1(x^2+3x+3).$$

Luând $x=1$ găsim $g_1(1)=g_1(7)$, apoi luând $x=3$, $g_1(7)=g_1(21)$, punând $x=5$, $g_1(21)=g_1(43)$ etc. deci $g_1(x)-g_1(1)=0$ are o infinitate de rădăcini, prin urmare g_1xf_1 este un polinom constant şi egal cu f1. Rezultă deci $f(X)=kX$, $g(X)=kX$ unde $k\in\mathbf{R}$. Evident toate aceste perechi de polinoame satisfac relaţia din enunţ.

3. Să se determine numerele reale a,b,c,d,e dihn intervalul $[-2,2]$, pentru care:

$$a+b+c+d+e=0$$
$$a^3+b^3+c^3+d^3+e^3=0$$
$$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5=10$$

Titu Andreescu

Soluţie: Fie $a=2\cos x$, $b=2\cos y$, $c=2\cos z$, $d=2\cos t$, $e=2\cos u$.
Folosind formulele uzuale se deduce uşor $2\cos 5x=(2\cos x)^5-5(2\cos x)^3+5(2\cos x)=a^5-5a^3+5a$. Rezultă deci $\Sigma 2\cos 5x=\Sigma a^5-5\Sigma a^3+5\Sigma a=10$, adică $\Sigma\cos 5x=5$. De aici $\cos 5x=\cos 5y=\cos 5z=\cos 5t=\cos 5u=1$ (căci $\cos\alpha\le 1$, $(\forall)\alpha\in\mathbf{R}$), deci $a,b,c,d,e\in\left\{\frac{-1-\sqrt5}{2},\frac{-1+\sqrt5}{2},2\right\}$. Deducem din $\Sigma a=0$ că unul din numere este 2, două sunt $\frac{-1-\sqrt5}{2}$ şi două sunt $\frac{-1+\sqrt5}{2}$. Verificăm că soluţia găsită satisface şi $\Sigma a^3=0$.

4. Fie $I\subseteq\mathbf{R}$ un interval şi $f:I\to\mathbf{R}$ o funcţie cu proprietatea că:

$$|f(x)-f(y)|\le|x-y|,\text{ oricare ar fi } x,y\in I.$$

Să se demonstreze că f este monotonă pe I dacă şi numai dacă, pentru orice $x,y\in I$, avem: $f(x)\le f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le f(y)$ sau $f(y)\le f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le f(x)$.

Romeo Ilie

Soluţie: Dacă f este monotonă atunci evident pentru $x,y\in I$ avem $f(x)\le f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le f(y)$ sau $f(x)\ge f\left(\frac{x+y}{2}\right)\ge f(y)$. Să presupunem că o funcţie cu proprietatea din ipoteză nu este monotonă, dar are proprietatea că $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\in[f(x),f(y)]\cup[f(y),f(x)]$, $(\forall)$ $x,y\in I$. Există atunci în I $x<y<z$ astfel încât $f(x)<f(y)>f(z)$ sau $f(x)>f(y)<f(z)$. Ne ocupăm de cazul $f(x)<f(y)>f(z)$, celălalt tratându-se analog. Fie $t\in\mathbf{R}$ astfel încât $t\in(f(x),f(y))\cap(f(z),f(y))$. Împărţim segmentul $[x,z]$ în $\left[x,\frac{x+z}{2}\right]\cup\left[\frac{x+z}{2},z\right]$ şi păstrăm jumătatea care-l conţine pe y. Fie $[x_1,z_1]$ jumătatea păstrată vom avea $f(x_1)$, $f(z_1)<t<f(y)$. Repetând procedeul de înjumătăţire anterior se obţine un şir $([x_n,z_n])$ de segmente care au proprietăţile $f(x_n)<t$, $f(z_n)<t$, $y\in[x_n,z_n]$ şi $z_n-x_n=\frac{z-x}{2^n}$. Vom avea $f(y)-f(x_n)<y-x_n<\frac{z-x}{2^n}$ de unde $f(y)-t<\frac{z-x}{2^n}$, $(\forall)$ $n\in\mathbf{N}$ de unde $f(y)\le t$, în contradicţie cu alegerea $t>f(y)$. Contradicţia obţinută termină demonstraţia.