



Atunci  $A_2A_1A''_3A''_4$  este triedru tridreptunghic cu vârful în  $A'_2$ , deci  $A_2$  (proiecția lui  $A'_2$  pe planul  $(A_1A''_3A''_4)$ ) este ortocentrul triunghiului  $A_1A''_3A''_4$ . În plus  $A''_3A_2$  este și mediană în triunghiul  $A_1A''_3A''_4$  ( $A_1A_2A''_4A_3$  este paralelogram), de unde rezultă imediat că  $A_2A_1=A_2A''_4=A_2A''_3$ , deci triunghiul  $A_1A_2A_3$  este echilateral.

### Clasa a IX-a

1. Fie  $a, b, c$  numere strict pozitive astfel încât  $ab+bc+ca=1$ . Să se demonstreze că:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \sqrt{3} + \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}.$$

*Soluție:* Trecând termenii ce conțin  $a, b, c$  în membrul stâng, inegalitatea de demonstrat devine

$$\frac{1-ab}{a+b} + \frac{1-bc}{b+c} + \frac{1-ca}{c+a} \geq \sqrt{3}, \text{ sau ținând cont de condiția din enunț}$$

$$\frac{c(a+b)}{a+b} + \frac{a(b+c)}{b+c} + \frac{b(c+a)}{c+a} = a+b+c \geq \sqrt{3}.$$

Avem  $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc = a^2+b^2+c^2+2 \geq ab+ac+bc+2=3$  de unde rezultă afirmația.

2. Fie  $ABC$  un triunghi dreptunghic în  $A$  și  $M \in (AB)$  astfel încât  $\frac{AM}{MB} = 3\sqrt{3} - 4$ .

Să se determine măsura unghiului  $B$  știind că simetricul lui  $M$  față de mijlocul segmentului  $GI$  aparține dreptei  $AC$ . ( $G$  este centrul de greutate al triunghiului, iar  $I$  centrul cercului înscris).

Marian Andronache

*Soluție:* Notăm  $N$  simetricul lui  $M$  față de mijlocul segmentului  $[GI]$ . Avem  $\overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AN} = \beta \cdot \overrightarrow{AC}$  și  $\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}$ . Dar  $\overrightarrow{GM} = (1-\alpha)\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{GB}$ ,  $\overrightarrow{GN} = (1-\beta)\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GC}$  și  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$  prin urmare

$$\overline{GI} = (1-\alpha)\overline{GA} + \alpha\overline{GB} + (1-\beta)\overline{GA} + \beta\overline{GC} = (2-\alpha-\beta)\overline{GA} - \alpha(\overline{GA} + \overline{GC}) + \beta\overline{GC} =$$

$$= (2-2\alpha-\beta)\overline{GA} - (\beta-\alpha)\overline{GC} \quad \text{vem} \quad \text{și}$$

$$(a+b+c)\overline{GI} = a\overline{GA} + b\overline{GB} + c\overline{GC} \quad \text{de unde} \quad \overline{GI} = \frac{a-b}{a+b+c}\overline{GA} + \frac{c-b}{a+b+c}\overline{GC}. \quad \text{Rezultă}$$

$$\frac{a-b}{a+b+c} = 2-2\alpha-\beta, \quad \frac{c-b}{a+b+c} = \beta-\alpha \quad \text{de unde} \quad \alpha = \frac{1}{3} + \frac{b}{a+b+c}. \quad \text{Notând } x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{a} \text{ avem}$$

$$x^2+y^2=1 \text{ și } \frac{x}{1+x+y} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}. \quad \text{Rezolvând sistemul obținem } x=1/2 \text{ deci } m(\angle B)=30^\circ.$$

3. Fie  $k$  și  $n$  numere naturale nenule,  $n > 2$ . Să se demonstreze că ecuația:

$$x^n - y^n = 2^k$$

nu are soluții în mulțimea numerelor naturale nenule.

*Soluție:* Arătăm întâi că oricare ar fi  $k \in \mathbb{N}^*$  ecuația  $x^4 - y^4 = 2^k$  nu are soluții în  $\mathbb{N}^*$ . Într-adevăr, dacă  $x^4 - y^4 = 2^k$  cu  $k, x, y \in \mathbb{N}^*$  atunci  $x^2 + y^2 = 2^s$ ,  $x^2 - y^2 = 2^l$  unde  $l, s \in \mathbb{N}^*$ . De aici ar rezulta  $x^2 = 2^{l-1}(2^{s-l} + 1)$ ,  $y^2 = 2^{l-1}(2^{s-l} - 1)$ . Ar trebui ca numerele  $2^{s-l} + 1$  și  $2^{s-l} - 1$  să fie pătrate perfecte, dar aceasta nu se poate căci nu există pătrate perfecte cu diferența 2.

Să presupunem că există valori  $n > 2$  astfel că pentru  $k \in \mathbb{N}^*$  ecuația  $x^n - y^n = 2^k$  are soluții în  $\mathbb{N}^*$ . Fie  $n_0 > 2$  cel mai mic cu această proprietate și  $k_0$  cel mai mic  $k \in \mathbb{N}^*$  pentru care ecuația  $x^{n_0} - y^{n_0} = 2^{k_0}$  are soluții în  $\mathbb{N}^*$ . Atunci  $n_0$  este impar căci în caz contrar, cum  $n_0 \neq 4$  am avea  $n_0/2 > 2$ , iar dacă  $x^{n_0} - y^{n_0} = 2^{k_0}$  atunci  $(x_0^2)^{n_0/2} - (y_0^2)^{n_0/2} = 2^{k_0}$ , contrazicând alegerea minimală a lui  $n_0$ .

Evident  $x_0, y_0$  pentru care  $x_0^{n_0} - y_0^{n_0} = 2^{k_0}$  sunt de aceeași paritate. Cum ultima egalitate se mai scrie

$$(x_0 - y_0) \left( x_0^{n_0-1} + x_0^{n_0-2} \cdot y_0 + \dots + y_0^{n_0-1} \right) = 2^{k_0}, \text{ iar al doilea factor din membrul stâng are un}$$

număr impar ( $n_0$ ) de termeni de aceeași paritate, aceștia trebuie să fie pari, adică  $x_0 = 2x_1$ ,  $y_0 = 2y_1$  cu  $x_1, y_1 \in \mathbb{N}^*$ . Dar atunci am avea  $x_1^{n_0} - y_1^{n_0} = 2^{k_0 - n_0}$ , ceea ce ar contrazice minimalitatea lui  $k_0$ . Prin reducere la absurd am demonstrat așadar afirmația din enunț.

4. Să se determine funcțiile  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  cu proprietatea

$$f(3x+2y) = f(x)f(y),$$

pentru orice  $x, y \in \mathbb{N}$ .

*Soluție:* Să presupunem că  $f$  este o funcție cu proprietatea din enunț. Punând  $x=y=0$  deducem  $f(0) = f(0)^2$ , deci  $f(0) = 0$  sau  $f(0) = 1$ .

*Cazul  $f(0) = 0$ .* Rezultă imediat că  $f(3x) = f(2y) = 0$ ,  $(\forall) x, y \in \mathbb{N}$ . Fie  $a = f(1)$ , atunci  $f(5) = f(2 \cdot 1 + 3 \cdot 1) = a^2$  și  $f(25) = f(2 \cdot 5 + 3 \cdot 5) = f(5)^2 = a^4$ . Pe de altă parte  $f(25) = f(2 \cdot 2 + 3 \cdot 7) = f(2) \cdot f(7) = 0$  deci  $a = 0$ . Avem așadar  $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 0$ . Cum orice număr natural  $k > 4$ ,  $k = 3x + 2y$  unde  $x, y \in \mathbb{N}$  și  $x, y < k$ , prin inducție,  $f(k) = 0$ ,  $(\forall) k \in \mathbb{N}$ .

*Gheorghe Iurea*

Cazul  $f(0)=1$ . Rezultă imediat  $f(2y)=f(y)$  și  $f(3x)=f(x)$ ,  $(\forall) x,y \in \mathbf{N}$ . Notând  $a=f(1)$  obținem  $f(2)=a$ ,  $f(3)=a$ ,  $f(4)=a$ ,  $f(5)=f(2 \cdot 1 + 3 \cdot 1)=a^2$ ,  $f(25)=f(2 \cdot 5 + 3 \cdot 5)=f(5) \cdot f(5)=a^4$  și  $f(25)=f(2 \cdot 2 + 3 \cdot 7)=f(2) \cdot f(7)=af(2 \cdot 2 + 3 \cdot 1)=a^3$  adică  $a^4=a^3$ , deci  $a=0$  sau  $a=1$ . De aici, ca în primul caz, se

obțin funcțiile  $f(x)=1$ ,  $(\forall) x \in \mathbf{N}$  și  $f(x)=\begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & x \in \mathbf{N}^* \end{cases}$ .

Se verifică ușor că cele 3 funcții găsite au proprietatea din enunț.

### Clasa a X-a

1. Fie  $X, Y, Z, T$  patru puncte distincte în plan. Spunem că segmentele  $[XY]$  și  $[ZT]$  sunt *conectate*, dacă există un punct  $O$  în plan astfel încât triunghiurile  $OXY$  și  $OZT$  să fie dreptunghice isoscele, cu unghiurile drepte în  $O$ . Fie  $ABCDEF$  un hexagon convex în care atâta segmentele  $[AB]$  și  $[CE]$ , cât și segmentele  $[BD]$  și  $[EF]$  sunt *conectate*. Să se arate că punctele  $A, C, D$  și  $F$  sunt vârfurile unui paralelogram și că segmentele  $[BC]$  și  $[AE]$  sunt *conectate*.

Bogdan Enescu

*Soluție:* Dacă triunghiurile  $OXY$  și  $OZT$  sunt orientate în sens invers trigonometric și  $x, y, z, t$  sunt afixele punctelor  $X, Y, Z$  respectiv  $T$ , iar  $m$  afixul lui  $O$ , avem  $x-m=i(y-m)$ ,  $z-m=i(t-m)$ . Rezultă  $m(1-i)=x-iy=z-it$ . Reciproc dacă  $x-iy=z-it$ , afixul lui  $O$  este  $m=\frac{x-iy}{1-i}$  și triunghiurile  $OXY$  și  $OZT$

vor fi dreptunghice în  $O$ , isoscele.

Fie  $a, b, c, d, e, f$  afixele vârfurilor hexagonului. Avem  $a-ib=c-ie$ ,  $b-id=e-if$ . Înmulțind a doua egalitate cu  $i$  și adunând-o termen cu termen la prima obținem  $a+d=c+f$ , deci  $ACDF$  este paralelogram. Înmulțind prima egalitate cu  $i$ , ea se scrie  $b-ic=e-ia$  deci  $[BC]$  și  $[EA]$  sunt conectate.

*Observație:* Definiția *conectării* a două segmente trebuie să includă și faptul că triunghiurile sunt la fel orientate. Concluzia din enunț trebuia așadar să fie  $[BC]$  și  $[EA]$  sunt conectate. Dacă se renunță la această condiție de orientare afirmația nu rămâne adevărată: hexagonul cu vârfurile de afixe  $a=1$ ,  $b=i$ ,  $c=-1+5i$ ,  $d=3+5i$ ,  $e=5+i$ ,  $f=3$  ar avea  $[AB]$  și  $[CE]$  conectate (alegând ca  $O$  originea axelor),  $[BD]$  și  $[EF]$  ar fi și ele conectate (alegând  $O$  punctul de afix  $(3, 5+1, 5i)$ ), dar  $A, C, D, F$  nu sunt vârfurile unui paralelogram, iar  $[BC]$  și  $[EA]$  nu sunt conectate.

2. Să se determine polinoamele  $f, g \in \mathbf{R}[X]$ , știind că:

$$(x^2+x+1) \cdot f(x^2-x+1) = (x^2-x+1) \cdot g(x^2+x+1),$$

oricare ar fi  $x \in \mathbf{R}$ .

Marcel Chiriță

*Soluție:* Presupunem că polinoamele  $f$  și  $g$  satisfac relația din enunț. Deoarece polinomul  $(x^2+x+1)f(x^2-x+1) - (x^2-x+1)g(x^2+x+1)$ , privit ca polinom în  $\mathbf{C}[X]$  se anulează pentru orice  $x \in \mathbf{R}$  el este identic nul adică se anulează oricare ar fi  $x \in \mathbf{C}$ . Punând  $x=\varepsilon$ , unde  $\varepsilon^2-\varepsilon+1=0$  obținem  $2\varepsilon f(0)=0 \cdot g(2\varepsilon)$ , deci  $f(0)=0$ . Punând  $x=\varepsilon$ , unde  $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$  obținem analog  $g(0)=0$ . Prin urmare  $f(X)=Xf_1(X)$ ,  $g(X)=Xg_1(X)$  și egalitatea din enunț devine

$$f_1(x^2-x+1) = g_1(x^2+x+1), \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Înlocuind  $x$  cu  $-x$  mai obținem și

$$f_1(x^2+x+1) = g_1(x^2-x+1).$$

Observăm că  $(x+1)^2 - (x+1) + 1 = x^2 + x + 1$  deci

$$g_1(x^2-x+1) = f_1(x^2+x+1) = f_1((x+1)^2 - (x+1) + 1) = g_1((x+1)^2 + (x+1) + 1) = g_1(x^2+3x+3).$$