Clasa a VIII-a

1. Pentru orice număr $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, notăm $P(n)$ numărul perechilor (a,b) de numere naturale nenule astfel încât

$$\frac{n}{a} \in (0,1),\ \frac{a}{b} \in (1,2) \text{ și } \frac{b}{n} \in (2,3).$$

a) Determinați $P(3)$.

b) Aflați n astfel încât $P(n)=2002$.

Mircea Fianu

Soluție: Din $n/a \in (0,1)$, $a/b \in (1,2)$, $b/n \in (2,3)$ deducem $2n<b<a<2b<6n$, deci $2n<b<3n$, prin urmare b ia $n-1$ valori distincte: $2n+1, 2n+2, \dots, 3n-1$. Pentru fiecare b, a ia oricare din valorile $b+1, \dots, 2b-1$, deci $b-1$ valori distincte.

Prin urmare numărul perechilor (a,b) este $2n+(2n+1)+\dots+(3n-2)=\dfrac{(n-1)(5n-2)}{2}$, de unde $P(3)=\dfrac{2\cdot 13}{13}=13$.

$P(n)=2002 \Leftrightarrow (n-1)(5n-2)=4004$ cu soluția $n=29$.

2. Fiind date numerele reale a,c,d, demonstrați că există cel mult o funcție $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ astfel încât:

$$f(ax+c)+d \leq x \leq f(x+d)+c, \text{ pentru orice } x \in \mathbf{R}.$$

Laurențiu Panaitopol

Soluție: Dacă a,b,c,d și f sunt ca în enunț, atunci $a \neq 0$ (pentru $a=0$ inegalitatea din stânga nu este satisfăcută de exemplu pentru $x=f(c)+d-1$).

Dacă notăm $y=ax+c$, din prima inegalitate obținem

$$f(y)=\frac{y}{a}-d-\frac{c}{a},\ \forall y \in \mathbf{R}.$$

La fel, din a doua inegalitate deducem

$$f(y) \geq y-d-c,\ \forall y \in \mathbf{R}$$

deci $y-d-c \leq \dfrac{y}{a}-d-\dfrac{c}{a},\ \forall y \in \mathbf{R} \Leftrightarrow y\left(1-\dfrac{1}{a}\right)-c+\dfrac{c}{a} \leq 0\ \forall y \in \mathbf{R}$.

Dacă $1-\dfrac{1}{a} \neq 0$ atunci funcția liniară $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $h(x)=\left(1-\dfrac{1}{a}\right)x-c+\dfrac{c}{a}$ nu are semn constant pe $\mathbf{R}$.

Deci $1-\dfrac{1}{a}=0$, adică $a=1$ și atunci

$$y-d-c \leq f(y) \leq x-d-c\ \forall y \in \mathbf{R},$$

de unde deducem că nu există funcții cu proprietățile cerute dacă $a \neq 1$, iar dacă $a=1$ există o singură asemenea funcție, $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(y)=y-d-c$.

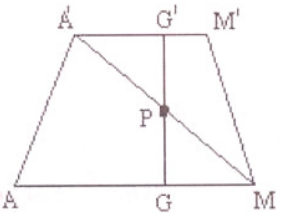
3. Se consideră trunchiul de piramidă regulată $[ABCA'B'C']$. Bazele ABC și $A'B'C'$ au centrele de greutate G, respectiv G'. Se dau $AB=36$, $A'B'=12$ și $GG'=35$.

a) Demonstrați că planele (ABC'), (BCA'), (CAB') au în comun un punct P, iar planele $(A'B'C)$, $(C'A'B)$ au în comun un punct P', ambele situate pe GG'.

b) Calculați lungimea segmentului [PP'].

Soluție: Fie M' mijlocul lui [B'C'] și M mijlocul lui [BC]. Atunci $A'M \subset (A'BC)$.

Considerăm trapezul AMM'A'.



În acest trapez $G'G_1 \perp AM$, iar $\frac{G'M'}{A'G'} = \frac{GM}{AG} = \frac{1}{2}$. În plus $\frac{A'M'}{AM} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{3}$.

Dacă $A'M \cap GG' = \{P\}$, atunci $\frac{G'P}{PG} = \frac{G'A'}{GM} = \frac{\frac{2}{3}A'M'}{\frac{1}{3}AM} = 2\frac{A'M'}{AM} = \frac{2}{3}$,

deci $GP = \frac{3}{5}GG' = 21$.

Prin urmare planul (A'BC) intersectează [GG'] într-un punct P astfel încât GP=21.

La fel se arată că dacă $(B'CA) \cap [GG'] = \{P_1\}$ atunci $GP_1 = 21$, deci $P = P_1$ și că $(C'AB) \cap [GG'] = \{P\}$, prin urmare $(A'BC) \cap (B'CA) \cap (C'AB) = \{P\}$. Procedând analog obținem că $(AB'C') \cap (BC'A') \cap (CA'B') = \{P'\}$ unde $P' \in [GG']$ și $G'P' = 5$.

b) $PP' = 35-(21+5) = 9$.

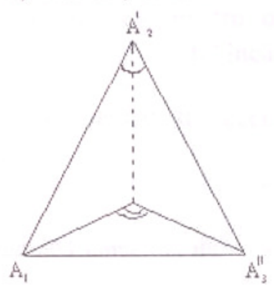
4. Prisma dreaptă $[A_1A_2A_3...A_nA'_1A'_2A'_n]$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$, are ca bază un poligon convex. Știind că $A_1A'_2 \perp A_2A'_3$, $A_2A'_3 \perp A_3A'_4$,..., $A_{n-1}A'_n \perp A_nA'_1$, $A_nA'_1 \perp A_1A'_2$, demonstrați că:

a) n=3;

b) prisma este regulată.

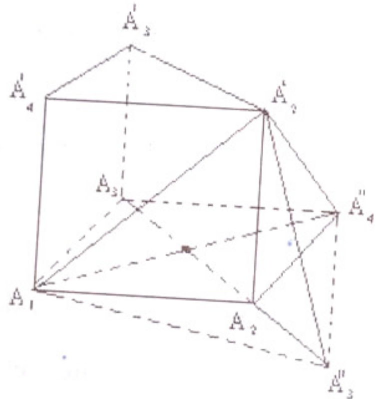
Mircea Fianu

Soluție: a) Fie A''_3 simetricul lui A_3 față de A_2. Atunci $A_2A''_3A'_2A'_3$ este paralelogram, deci $A'_2A''_3 \| A_2A'_3$, de unde deducem că $m(\angle A_1A'_2A''_3) = 90°$.



Deoarece A_2 este proiecția lui A'_2 pe planul $(A_1A_2A''_3)$ și $m(\angle A_1A'_2A''_3) = 90°$, măsura unghiului $A_1A_2A''_3$ este mai mare de 90°, deci $m(\angle A_1A_2A_3) < 90°$. Analog se arată că toate unghiurile poligonului $A_1A_2...A_n$ sunt ascuțite. Cum un poligon convex cu mai mult de 3 laturi are cel puțin un unghi cu măsura $\geq 90°$ (suma unghiurilor interioare unui poligon convex este $180°(n-2)$), deducem că n=3.

b) Mutăm "unghiurile drepte în A'_2 construind în planul (ABC) punctele: A''_3 – simetricul lui A_3 față de A_2 și A''_4 astfel încât $[A_2A''_4]$ să fie paralel și egal cu $[A_1A]$.



Atunci $A'_2A_1A''_3A''_4$ este triedru tridreptunghic cu vârful în A'_2, deci A_2 (proiecția lui A'_2 pe planul $(A_1A''_3A''_4)$ este ortocentrul triunghiului $A_1A''_3A''_4$. În plus A''_3A_2 este și mediană în triunghiul $A_1A''_3A''_4$ ($A_1A_2A''_4A_3$ este paralelogram), de unde rezultă imediat că $A_2A_1=A_2A''_4=A_2A''_3$, deci triunghiul $A_1A_2A_3$ este echilateral.

Clasa a IX-a

1. Fie a,b,c numere strict pozitive astfel încât ab+bc+ca=1. Să se demonstreze că:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\sqrt{3}+\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}.$$

(***)

Soluție: Trecând termenii ce conțin a,b,c în membrul stâng, inegalitatea de demonstrat devine

$\frac{1-ab}{a+b}+\frac{1-bc}{b+c}+\frac{1-ca}{c+a}\geq\sqrt{3}$, sau ținând cont de condiția din enunț

$\frac{c(a+b)}{a+b}+\frac{a(b+c)}{b+c}+\frac{b(c+a)}{c+a}=a+b+c\geq\sqrt{3}$.

Avem $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=a^2+b^2+c^2+2\geq ab+ac+bc+2=3$ de unde rezultă afirmația.

2. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și $M\in(AB)$ astfel încât $\frac{AM}{MB}=3\sqrt{3}-4$.

Să se determine măsura unghiului B știind că simetricul lui M față de mijlocul segmentului GI aparține dreptei AC. (*G este centrul de greutate al triunghiului, iar I centrul cercului înscris*).

Marian Andronache

Soluție: Notăm N simetricul lui M față de mijlocul segmentului [GI]. Avem $\overrightarrow{AM}=\alpha\cdot\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\beta\cdot\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}$. Dar $\overrightarrow{GM}=(1-\alpha)\overrightarrow{GA}+\alpha\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GN}=(1-\beta)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GC}$ și $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ prin urmare