OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ediția a 53-a
RÂMNICU VÂLCEA
16-23 martie 2002

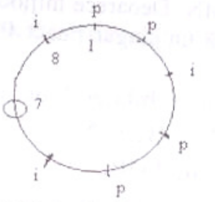
Clasa a VII-a

1. La o masă circulară de joc sunt 8 jucători. La un moment dat se constată că fiecare jucător împreună cu cei doi vecini ai săi au (împreună) un număr impar de fise câștigătoare. Dovediți că fiecare jucător are cel puțin o fisă câștigătoare.

(***)

Soluție: Asociem fiecărui jucător una din literele p sau i, în funcție de paritatea numărului fiselor sale câștigătoare. Vom demonstra că fiecărui jucător trebuie să-i atașăm litera i (adică fiecare jucător are un număr impar de fise câștigătoare), de unde va rezulta concluzia problemei.

Să presupunem prin reducere la absurd că există cel puțin un jucător cu număr par de fise câștigătoare. Alegem unul din aceștia, pe care îl vom numi jucătorul 1, iar pe ceilalți îi numerotăm în sensul acelor de ceasornic. Unul din vecinii jucătorului 1 (de exemplu 2) are litera p, iar celălalt (nr. 8) are litera i și putem completa în mod unic (în sensul acelor de ceasornic) șirul de p și i astfel:



Pentru a respecta regula ca oricare trei vecini să aibă un număr impar de i-uri, mergând în sensul acelor de ceasornic trebuie ca jucătorul 7 să aibă litera i. Însă atunci jucătorii 7,8 și 1, vecini și ei pe cerc, au împreună un număr par de fise câștigătoare, absurd.

2. Demonstrați că orice număr real x pentru care $0<x<1$ se scrie ca diferența a două numere iraționale strict pozitive și mai mici strict ca 1.

(***)

Soluție: Considerăm mai întâi cazul $x\in(0,1)$, $x\in\mathbf{Q}$. Alegem un număr irațional $\alpha\in(0,\ 1-x)$. Atunci $x+\alpha\in(0,1)$, $\alpha\in(0,1)$, $x+\alpha$ și α sunt iraționale și în plus $x=(x+\alpha)-\alpha$.

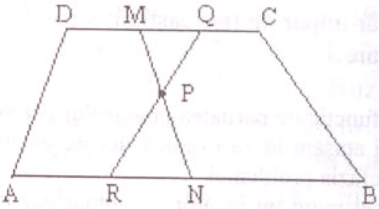
Considerăm acum $x\in(0,1)$, $x\notin\mathbf{Q}$. Numerele $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\dots,\frac{k}{k+1},\dots$ împart intervalul $(0,1)$ în intervale disjuncte de forma $\left(\frac{k-1}{k},\frac{k}{k+1}\right)$.

Deoarece $x\in(0,1)$ și $x\notin\mathbf{Q}$, există un număr k pentru care $x\in\left(\frac{k-1}{k},\frac{k}{k+1}\right)$.

Atunci $x+\frac{x}{k}=x\left(\frac{k+1}{k}\right)\in(0,1)$ şi $x\cdot\frac{k+1}{k}\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$. De asemenea $\frac{x}{k}\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ şi $\frac{x}{k}\in(0,1)$, iar $\left(x+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}=x$.

3. Fie ABCD un trapez. Determinaţi mulţimea punctelor P interioare trapezului, care satisfac proprietatea: *prin punctul P trec cel puţin două drepte care intersectează bazele trapezului împărţindu-l, fiecare, în două trapeze de arii egale.*

(***)



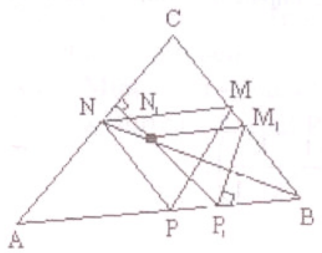
Soluţie: Arătăm că toate dreptele care intersectează bazele [AB] şi [CD] ale trapezului ABCD şi îi înjumătăţesc aria trec prin mijlocul segmentului [MN], unde M şi N sunt mijloacele bazelor [DC], [AB] (respectiv).
Se verifică imediat că dacă QR este o dreaptă care înjumătăţeşte aria trapezului ($Q\in DC$, $R\in AB$) atunci $DQ+AR=\frac{AB+CD}{2}$, deci MN este o asemenea dreaptă, iar dacă QR este o altă dreaptă atunci MQ=RN, deci RNQM este paralelogram, de unde deducem că RQ trece prin mijlocul lui MN. Deoarece mijlocul lui MN este singurul punct comun al dreptelor MN şi QR, deducem că există un singur punct P (mijlocul lui MN) cu proprietăţile din enunţ.

4. a) Ştiind că triunghiul ABC este echilateral de latură a şi că triunghiul MNP este determinat de condiţiile $P\in(AB)$, $M\in(BC)$, $N\in(AC)$, astfel încât $MP\perp AB$, $NM\perp BC$ şi $PN\perp AC$, calculaţi lungimea segmentului [MP].

b) Demonstraţi că, pentru orice triunghi ABC ascuţitunghic, există punctele $P\in(AB)$, $M\in(BC)$, $N\in(AC)$, astfel încât $MP\perp AB$, $NM\perp BC$ şi $PN\perp AC$.

Mircea Fianu

Soluţie: a) $m(\angle PMB)=30°$, deci $m(\angle PMN)=60°$. Analog $m(\angle MPN)=60°$, deci triunghiul MPN este echilateral.
Dacă NC=x atunci AN=a–x, iar AP=x (din congruenţa $\Delta MNP\equiv\Delta NPA$). Din triunghiul PAN cu unghiul P de măsură 30° deducem $a-x=\frac{x}{2}$ şi $PN=\frac{2}{3}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.



b) Fie $P\in(AB)$. Perpendiculara în P_1 pe AB intersectează BC în M_1 şi fie N_1 intersecţia dintre perpendiculara în M_1 pe BC cu perpendiculara din P_1 pe AC.
Dacă $BN_1\cap AC=\{N\}$, atunci $N\in(AC)$. Paralela prin N la M_1N_1 intersectează (CB) în M, iar paralela prin N la P_1N_1 intersectează (AB) în P. Triunghiul MNP este triunghiul căutat. Într-adevăr, $NM\perp BC$ şi $NP\perp AC$ pentru că $M_1N_1\perp BC$ şi $N_1P_1\perp AC$.

Avem de asemenea: $\frac{BM_1}{BM}=\frac{BN_1}{BN}=\frac{BP_1}{BP}$ de unde deducem $MP\parallel M_1P_1$, deci şi $MP\perp AB$.