

Deoarece $\det(A^2 + 2aA + (a^2 + b^2)I_3) = \det(A + aI_3 + bI_3) \cdot \det(A + aI_3 - bI_3) \geq 0$ și $\det\left(\frac{-m}{2}I_3\right) = -\frac{m^3}{8} < 0$, rezultă că egalitatea $g(A) = -\frac{m}{2}I_3$ este imposibilă.

Altă soluție. Deoarece polinomul cu coeficienți reali $\det(A - xI_3)$ are grad trei, rezultă că el are cel puțin o rădăcină reală r , deci sistemul omogen $AX = rX$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, are cel puțin

o soluție nebanală S . Presupunând că $f(A) = 0_3$, rezultă $f(A) \cdot S = f(r) \cdot S = 0$, în contradicție cu faptul că $f(r) \neq 0$ și $S \neq 0$.

b) Dacă $\det A = 0$, atunci $A \cdot A^* = A^* \cdot A = 0_3$, deci $(A + A^*)^2 = A^2 + (A^*)^2$. Reciproc, dacă $(A + A^*)^{2n} = A^{2n} + (A^*)^{2n}$ și $d = \det A \neq 0$, atunci $(dA^2 + I_3)2n = d^{2n}A^{4n} + I_3$. Prin eliminarea parantezelor și înmulțire cu A^{-2} obținem relația $f(A^2) = 0_3$, unde $f(X) = h(X)/X$ și $h(X) = (dX + 1)^{2n} - d^{2n}X^{2n} - 1$. Pe de altă parte $h'(X) = 2nd((dX + 1)^{2n-1} - d^{2n-1}X^{2n-1})$ nu are rădăcini reale, contradicție.

CLASA A XII-A

I. a) Se consideră K un corp comutativ și n un număr natural, $n \geq 2$. Să se determine $Z(M_n(K)) = \{A \in M_n(K) \mid AX = XA, \text{ pentru orice } X \in M_n(K)\}$ și să se arate că subinelul $Z(M_n(K))$ este izomorf cu K .

b) Să se arate că inele $M_n(\mathbf{R})$ și $M_n(\mathbf{C})$ nu sunt izomorfe.

Marian Andronache, Ion Savu

Soluție:

a) Fie E_{1i} matricea din $M_n(\mathbf{C})$ ce are 1 pe poziția $(1, i)$ și 0 în rest și fie $A = (a_{ij}) \in Z(M_n(K))$. Din $AE_{1i} = E_{1i}A$, rezultă $a_{i1} = \dots = a_{i, i-1} = a_{i, i+1} = \dots = a_{in} = 0$ și $a_{11} = a_{ii}, \forall i = \overline{1, n}$. De aici rezultă că $A = aI_n$, deci $Z(M_n(K)) = \{aI_n \mid a \in K\}$. În plus, $f: K \rightarrow Z(M_n(K)), f(a) = aI_n$ este izomorfism de corpuri.

b) Presupunem că $M_n(\mathbf{R}) \cong M_n(\mathbf{C})$ și notăm cu $f: M_n(\mathbf{R}) \rightarrow M_n(\mathbf{C})$ un izomorfism. Atunci $f(Z(M_n(\mathbf{R}))) = Z(M_n(\mathbf{C}))$ și $\tilde{f}: Z(M_n(\mathbf{R})) \rightarrow Z(M_n(\mathbf{C}))$ dat de $\tilde{f}(A) = f(A)$ este izomorfism de inele. Dar, din a), $Z(M_n(\mathbf{R}))$ este izomorf cu \mathbf{R} și $Z(M_n(\mathbf{C}))$ este izomorf cu \mathbf{C} , ceea ce ar conduce la $(\mathbf{R}, +, \cdot) \cong (\mathbf{C}, +, \cdot)$. Dacă $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ ar fi izomorfism de corpuri, atunci există $a \in \mathbf{R}$, astfel încât $\varphi(a) = i$. Atunci $\varphi(a^4) = 1$, de unde rezultă $a^4 = 1$. Dar în \mathbf{R} ecuația $a^4 = 1$ are soluțiile $a = \pm 1$, iar relațiile $\varphi(\pm 1) = \pm 1$ contrazic $\varphi(a) = i$.

II. Fie $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, n impar. Să se determine funcțiile continue $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ astfel încât

$$\int_0^1 \left(f(\sqrt[k]{x}) \right)^{n-k} dx = \frac{k}{n}, \text{ pentru orice } k \in \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

Titu Andreescu

Soluție: Cu schimbarea de variabilă $\sqrt[k]{x} = t$, relația din enunț devine $\int_0^1 (f(t))^{n-k} \cdot t^{k-1} dt = \frac{1}{n}$, pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, relație care este valabilă și pentru $k = n$.

Atunci

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f(t) - t)^{n-1} dt &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (-1)^k (f(t))^{n-1-k} t^k dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} (-1)^{k-1} (f(t))^{n-k} t^{k-1} dt = \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} C_{n-1}^{k-1} (-1)^{k-1} \int_0^1 (f(t))^{n-k} t^{k-1} dt = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} C_{n-1}^{k-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} C_{n-1}^{k-1} = 0 \end{aligned}$$

Cum $n-1$ este par și strict pozitiv, iar $f - \text{Id}_{[0,1]}$ este continuă, rezultă că $f = \text{Id}_{[0,1]}$.

III. Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție continuă cu proprietatea $x(f) \geq \int_0^x f(t) dt$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

- a) Să se arate că funcția $g: \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$, este crescătoare pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, \infty)$;
- b) Dacă în plus, pentru orice $x \in \mathbf{R}$, are loc relația $\int_x^{x+1} f(t) dt = \int_{x-1}^x f(t) dt$, să se arate că f este constantă.

Soluție: Fie $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Mihai Piticari

a) Din condiția $xf(x) \geq \int_0^x f(t) dt$ pentru orice x real, rezultă că $\frac{xf(x) - \int_0^x f(t) dt}{x^2} \geq 0$

pentru orice $x \neq 0$; rezultă $\left(\frac{F(x)}{x}\right)' \geq 0$, deci $g(x) = \frac{F(x)}{x}$ este crescătoare pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, \infty)$.

b) Din relația $\int_x^{x+1} f(t) dt = \int_{x-1}^x f(t) dt$ rezultă $F(x+1) - F(x) = F(x) - F(x-1) = K(x)$. Din

aceasta rezultă $F(x+n) - F(x) = nK(x)$ sau $\frac{x+n}{n} \frac{F(x+n)}{x+n} - \frac{F(x)}{n} = K(x)$, de unde,

făcând $n \rightarrow \infty$, avem $K(x) = c$ pentru orice $x \in \mathbf{R}^*$. Deci $F(x+1) - F(x) = c$, unde c este o constantă reală pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Prin urmare f este periodică de perioadă 1.

Varianta 1. Există $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție periodică, de perioadă 1 și $a \in \mathbf{R}$ astfel ca $F(x)$

$= ax + h(x)$. Deoarece $\frac{F(x)}{x} = a + \frac{h(x)}{x}$ pentru orice $x \in \mathbf{R}^*$, aplicația $s: \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$,

$s(x) = \frac{h(x)}{x}$, este crescătoare pe $(0, \infty)$ și $(-\infty, 0)$. Dacă există x_0 astfel ca $h(x_0) = 0$, atunci h

este identic nulă. Dacă $h(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, atunci

$$\left(\frac{h(x)}{x}\right)' = \frac{xh'(x) - h(x)}{x^2} \geq 0, \forall x > 0,$$

deci $h'(x) > 0$, de unde h este strict crescătoare pe $(0, \infty)$, fapt care contrazice periodicitatea lui h .

Dacă $h(x) < 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, atunci $h'(x) \leq \frac{h(x)}{x}$ pentru orice $x < 0$. Deoarece $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = 0$, deducem că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $x_\varepsilon < 0$ astfel încât pentru orice $x \in (-\infty, x_\varepsilon)$, $h'(x) \leq \varepsilon$. Deoarece h este periodică, rezultă că $h'(x) \leq \varepsilon$ pentru orice $x < 0$, deci $h'(x) \leq 0$ pentru orice $x < 0$. Prin urmare h este descrescătoare și periodică, deci h este constantă. În concluzie, $f = F'$ este constantă.

Varianta 2. Fie $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dată prin $g(x) = \int_0^x f(t) dt - x \int_0^1 f(t) dt$. Cum

$g(x+1) = \int_0^{x+1} f(t) dt - (x+1) \int_0^1 f(t) dt = \int_0^x f(t) dt + \int_x^{x+1} f(t) dt - x \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt = g(x)$ rezultă că g este periodică și fiind continuă este mărginită.

Din $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$ rezultă $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt$.

Cum $f(x) \geq \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ pentru $x > 0$ și $f(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ pentru $x < 0$, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$ a.î. $f(x) > \int_0^1 f(t) dt - \varepsilon$ pentru $\forall x \in (\delta_\varepsilon, \infty)$ și $f(x) < \int_0^1 f(t) dt + \varepsilon$, $\forall x \in (-\infty, -\delta_\varepsilon)$. Din periodicitatea lui f rezultă că $|f(x) - \int_0^1 f(t) dt| < \varepsilon$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$ și orice $\varepsilon > 0$, deci $f(x) = \int_0^1 f(t) dt$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

IV. Dacă $(G, +)$ este un grup abelian finit cu $n(G)$ elemente, notăm cu $i(G)$ numărul legilor de compoziție $(G, *)$ pentru care $(G, +, *)$ este inel.

Să se arate că:

- $i(\mathbf{Z}_{12}) = 4$
- $i(A \times B) \geq i(A)i(B)$, unde $(A, +)$ și $(B, +)$ sunt grupuri abeliene finite.
- există două șiruri de grupuri comutative finite $(G_k)_{k \geq 1}, (H_k)_{k \geq 1}$ astfel încât

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n(G_k)}{i(G_k)} = 0 \text{ și } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n(H_k)}{i(H_k)} = \infty.$$

Barbu Berceanu

Soluție:

- Fie \hat{a} elementul unitate în $(\mathbf{Z}_{12}, +, *)$. Atunci

$$\hat{1} * \hat{x} = \hat{1} * (\hat{1} + \dots + \hat{1}) = (\hat{1} * \hat{1}) + \dots + (\hat{1} * \hat{1}) = x(\hat{1} * \hat{1}).$$

Cum $\hat{a} * \hat{1} = \hat{a}(\hat{1} * \hat{1}) = \hat{1}$, rezultă că $\hat{1} * \hat{1}$ și \hat{a} sunt inversabile și $\hat{1} * \hat{1} = \hat{a}^{-1}$. Deci $\hat{a} \in U(\mathbf{Z}_{12})$ și poate fi ales în $|U(\mathbf{Z}_{12})| = 4$ moduri. Cum $\hat{x} * \hat{y} = xy \cdot (\hat{1} * \hat{1})$, legea este complet determinată.

Asociativitatea rezultă din calcul.

- Dacă $(A, +, *)$, $(B, +, \Delta)$ sunt inele, atunci $(A \times B, +, \circ)$ este inel, unde $(a_1, b_1) \circ (a_2, b_2) = (a_1 * a_2, b_1 \Delta b_2)$. De aici rezultă că $i(A \times B) \geq i(A)i(B)$.

c) Arătăm că $i(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_1) \geq 6$. Inelul $(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2, +, \cdot)$ și corpul $(F_4, +, \cdot)$ au câte 4 elemente, nu sunt izomorfe, dar au grupurile aditive izomorfe. Considerând pentru fiecare dintre ele câte 2 elemente automorfisme ale grupului aditiv care nu invariază elementul neutru la înmulțire, cu ajutorul transportului de structură, vom obține patru operații de înmulțire diferite de cele inițiale. Deci $i(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2) \geq 6$. Fie $G_k = (\mathbf{Z}_2, +)^{2^k}$. Din punctul b) deducem că

$$\frac{n(G_k)}{i(G_k)} \leq \frac{4^k}{(i(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2))^k} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k,$$

ceea ce probează prima parte a afirmației c).

Soluția de la punctul a) cu n în loc de 12 arată că $i(\mathbf{Z}_n) = \varphi(n)$.

Fie p_k al k -lea număr prim și fie $H_k = \mathbf{Z}_{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p_k}$. Cum $i(H_k) = \varphi(2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k) = (2-1)(3-1) \dots (p_k - 1)$, rezultă că

$$\frac{n(H_k)}{i(H_k)} = \prod_{i=1}^k \frac{p_i}{p_i - 1}.$$

Se observă că $a_k = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}}$ este un șir strict crescător. Pentru $n \in \mathbf{N}^*$ fixat, definim

P_n ca fiind mulțimea numerelor prime care apar în descompunerea numerelor mai mici sau egale cu n și pentru $p \in P_n$, notăm $k_p = [\log_p n]$. Dacă $m = \max\{k_p \mid p \in P_n\}$, atunci

$$a_k > \prod_{i=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_i} + \dots + \frac{1}{p_i^m}\right).$$

În acest produs vom întâlni termenul $\frac{1}{q}$ pentru orice $q \leq n$, căci dacă $q = p_1^{r_1} \dots p_t^{r_t}$ este

descompunerea canonică a lui q cu $p_1, \dots, p_t \in P_n$ și $r_1, \dots, r_t \leq m$, factorul $\frac{1}{p_1^{r_1}} \dots \frac{1}{p_t^{r_t}}$ se ca

găsi în expresia $\prod_{i=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_i} + \dots + \frac{1}{p_i^m}\right)$, rezultă că, pentru $k_n = \max_{p \in P_n}$ avem

$$a_{k_n} > 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > \ln n.$$