CLASA A XI-A

I. Determinați locul geometric al punctelor M din planul unui romb $ABCD$ pentru care
$$MA \cdot MC + MB \cdot MD = AB^2.$$

Ovidiu Pop

Soluție: Alegem un sistem cartezian de coordonate xOy pentru care $A(a,0)$, $B(0,b)$, $C(-a,0)$, $D(0,-b)$; fie M de coordonatele (x, y). Ecuația locului geometric este:
$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+a)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-b)^2}\cdot\sqrt{x^2+(y+b)^2}=a^2+b^2.$$

Din inegalitatea lui Cauchy obținem
$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+a)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-b)^2}\cdot\sqrt{x^2+(y+b)^2}\geq$$
$$\geq(a-x)(a+x)+y^2+x^2+(b-y)(b+y)=a^2+b^2$$

Rezultă că, dacă M aparține locului geometric, atunci $(a-x)y = y(a+x)$, adică $xy=0$. Dacă $y = 0$, atunci $|x^2-a^2|+x^2+b^2=a^2+b^2$, deci $x \in [-a, a]$. Analog, pentru $x = 0$, obținem $y \in [-b, b]$. Locul este $[AC] \cup [BD]$.

II. Fie numerele reale $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$, $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ și $M = \left(a_i^{x_j}\right)_{i,j\in\overline{1,4}}$ o matrice pătrată de ordinul patru.

Demonstrați că $\det(M) > 0$.

Marian Andronache, Ion Savu

Soluție: Fie $M_k = \left(a_i^{x_j}\right)_{i,j\in\overline{1,k}}$ unde $k = 2, 3, 4$. Vom demonstra, inductiv că $\det(M_k) > 0$.

Notăm $b_i = \dfrac{a_i+1}{a_1}$, deci $1 < b_1 < b_2 < b_3$.

Cazul $k = 2$. $\det(M_2)=\begin{vmatrix} a_1^{x_1} & a_1^{x_2} \\ a_2^{x_1} & a_2^{x_2}\end{vmatrix}=a_1^{x_1+x_2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b_1^{x_1} & b_2^{x_2}\end{vmatrix}>0$.

Cazul $k = 3$.

Rezultă $\det(M_3)=\begin{vmatrix} a_1^{x_1} & a_1^{x_2} & a_1^{x_3} \\ a_2^{x_1} & a_2^{x_2} & a_2^{x_3} \\ a_3^{x_1} & a_3^{x_2} & a_3^{x_3}\end{vmatrix}=a_1^{x_1+x_2+x_3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b_1^{x_1} & b_1^{x_2} & b_1^{x_3} \\ b_2^{x_1} & b_2^{x_2} & b_2^{x_3}\end{vmatrix}=a_1^{x_1+x_2+x_3}D(x_1,x_2,x_3)$.

Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = D(x_1, x_2, x)$. Dacă $f(x_3) = 0$, atunci există două rădăcini $c_1 < c_2$ ale derivatei f'. Rezultă că sistemul omogen $\begin{cases}\alpha_1 b_1^{c_1}+\alpha_2 b_2^{c_1}=0\\ \alpha_1 b_1^{c_2}+\alpha_2 b_2^{c_2}=0\end{cases}$ are determinantul pozitiv și soluția $\alpha_2=\ln b_2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b_1^{x_1} & b_2^{x_2}\end{vmatrix}>0$, contradicție. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, avem că $f(x) > 0$, pentru orice $x > x_2$.

Cazul $k = 4$. Ca mai sus $\det(M_4) = a_1^{x_1+x_2+x_3+x_4} D(x_1, x_2, x_3, x_4)$, funcția $g(x) = D(x_1, x_2, x_3, x)$ nu se anulează în x_4, iar $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, implică $g(x) > 0$ pentru $x > x_3$.

III. Fie $f,\ g : [0,\infty) \to \mathbf{R}$, f continuă și g crescătoare și nemărginită. Presupunem că pentru orice șir $(x_n)_{n\in \mathrm{N}}$ de numere raționale cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)g(x_n) = 1$. Arătați că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)g(x) = 1$.

Soluție: *Radu Gologan*

a) g crescătoare și nemărginită implică $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ și faptul că există M_0 pentru care $g(x) > 0$, $\forall x \geq M_0$.

b) Există $M \geq M_0$ astfel ca $f|_{[M,\infty)}$ este nenegativă: în caz contrar, dacă există $y_n \to \infty$, $f(y_n) < 0$, atunci există z_n rațional, $y_n < z_n$ (deci $\lim z_n = \infty$) și $f(z_n) < 0$, ceea ce contrazice $\lim f(z_n)g(z_n) = 1$.

c) Este suficient să demonstrăm că pentru un șir (y_n), $y_n > M$, $\lim y_n = \infty$, avem $\lim\limits_{x\to\infty} f(y_n)g(y_n) = 1$. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Pentru fiecare y_n există două numere raționale x_n, z_n astfel ca: $M < x_n < y_n < z_n$, $y_n - 1 < x_n$ (deci $\lim x_n = \lim z_n = \infty$) și

$$\frac{-\varepsilon}{2g(y_n)} + f(x_n) < f(y_n) < +f(z_n) + \frac{\varepsilon}{2g(y_n)}.$$ De aici

$$\frac{-\varepsilon}{2} + f(x_n)g(x_n) \leq \frac{-\varepsilon}{2} + f(x_n)g(y_n) < f(y_n)g(y_n) < f(z_n)g(y_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leq$$

$$\leq f(z_n)g(z_n) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alegem n_ε astfel ca pentru $n \geq n_\varepsilon$: $|\, f(z_n)g(z_n) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ și $|\, f(x_n)g(x_n) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$, de unde $1 - \varepsilon < f(y_n)g(y_n) < 1 + \varepsilon$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)g(y_n) = 1$.

IV. Fie A o matrice pătrată de ordin 3, cu elemente reale. Demonstrați că:

a) dacă f este un polinom cu coeficienți reali care nu are rădăcini reale, atunci $f(A) \neq 0_3$;

b) există un număr natural nenul n astfel încât $(A + A^*)^{2n} = A^{2n} + (A^*)^{2n}$, dacă și numai dacă $\det(A) = 0$.

Soluție: a) Din ipoteză rezultă că polinomul are semn constant; putem presupune $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deci valoarea minimă m a polinomului este strict pozitivă. Polinomul $g = f - \frac{m}{2}$ nu are rădăcini reale, deci factorii ireductibili peste $\mathbf{R}$ ai lui g sunt de forma $X^2 + 2aX + a^2 + b^2$. *Laurențiu Panaitopol*

Deoarece $\det(A^2+2aA + (a^2 + b^2)I_3) = \det(A + aI_3 + biI_3)\cdot\det(A + aI_3 - biI_3) \geq 0$ şi $\det\left(\frac{-m}{2}I_3\right) = -\frac{m^3}{8} < 0$, rezultă că egalitatea $g(A) = -\frac{m}{2}I_3$ este imposibilă.

Altă soluţie. Deoarece polinomul cu coeficienţi reali $\det(A - xI_3)$ are grad trei, rezultă că el are cel puţin o rădăcină reală r, deci sistemul omogen $AX = rX$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, are cel puţin o soluţie nebanală S. Presupunând că $f(A) = O_3$, rezultă $f(A)\cdot S = f(r)\cdot S = 0$, în contradicţie cu faptul că $f(r) \neq 0$ şi $S \neq 0$.

b) Dacă $\det A = 0$, atunci $A\cdot A^* = A^*\cdot A = 0_3$, deci $(A + A^*)^2 = A^2 + (A^*)^2$. Reciproc, dacă $(A + A^*)^{2n} = A^{2n} + (A^*)^{2n}$ şi $d = \det A \neq 0$, atunci $(dA^2 + I_3)2n = d^{2n}A^{4n} + I_3$. Prin eliminarea parantezelor şi înmulţire cu A^{-2} obţinem relaţia $f(A^2) = O_3$, unde $f(X) = h(X)/X$ şi $h(X) = (dX + 1)^{2n} - d^{2n}X^{2n} - 1$. Pe de altă parte $h'(X) = 2nd((dX + 1)^{2n-1} - d^{2n-1}X^{2n-1})$ nu are rădăcini reale, contradicţie.

CLASA A XII-A

I. a) Se consideră K un corp comutativ şi n un număr natural, $n \geq 2$. Să se determine $Z(M_n(K)) = \{A \in M_n(K) \mid AX = XA$, pentru orice $X \in M_n(K)\}$ şi să se arate că subinelul $Z(M_n(K))$ este izomorf cu K.

b) Să se arate că inele $M_n(\mathbf{R})$ şi $M_n(\mathbf{C})$ nu sunt izomorfe.

Marian Andronache, Ion Savu

Soluţie:

a) Fie E_{1i} matricea din $M_n(\mathbf{C})$ ce are 1 pe poziţia $(1,i)$ şi 0 în rest şi fie $A = (a_{ij}) \in Z(M_n(K))$. Din $AE_{1i} = E_{1i}A$, rezultă $a_{i1} = ... = a_{i\,i-1} = a_{i\,i+1} = ... = a_{in} = 0$ şi $a_{11} = a_{ii}$, $\forall\ i = \overline{1,n}$. De aici rezultă că $A = aI_n$, deci $Z(M_n(K)) = \{aI_n \mid a \in K\}$. În plus, $f: K \to Z(M_n(K))$, $f(a) = aI_n$ este izomorfism de corpuri.

b) Presupunem că $M_n(\mathbf{R}) \cong M_n(\mathbf{C})$ şi notăm cu $f: M_n(\mathbf{R}) \to Mn(\mathbf{C})$ un izomorfism. Atunci $f(Z(M_n(\mathbf{R}))) = Z(M_n(\mathbf{C}))$ şi $\widetilde{f}: Z(M_n(\mathbf{R})) \to Z(M_n(\mathbf{C}))$ dat de $\widetilde{f}(A) = f(A)$ este izomorfism de inele. Dar, din a), $Z(Mn(\mathbf{R}))$ este izomorf cu $\mathbf{R}$ şi $Z(Mn(\mathbf{C}))$ este izomorf cu $\mathbf{C}$, ceea ce ar conduce la $(\mathbf{R},+,\cdot) \cong (\mathbf{C},+,\cdot)$. Dacă $\varphi: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ ar fi izomorfism de corpuri, atunci există $a \in \mathbf{R}$, astfel încât $\varphi(a) = i$. Atunci $\varphi(a^4) = 1$, de unde rezultă $a^4 = 1$. Dar în $\mathbf{R}$ ecuaţia $a^4 = 1$ are soluţiile $a = \pm 1$, iar relaţiile $\varphi(\pm 1) = \pm 1$ contrazic $\varphi(a) = i$.

II. Fie $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, n impar. Să se determine funcţiile continue $f: [0,1] \to \mathbf{R}$ astfel încât

$$\int_0^1 \left(f\left(\sqrt[k]{x}\right)\right)^{n-k} dx = \frac{k}{n},\ \text{pentru orice } k \in \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

Titu Andreescu