b) „⇒” Arătăm mai întâi că dacă n este prietenos atunci fiecare A_i, are cel puțin 3 elemente. Dacă $|A_i| = 2$ atunci $A_i = \{j, k\}$, deci $A_i \cap A_j = \{k\}$ și $A_i \cap A_k = \{j\}$. Rezultă $j \in A_k$ și $k \in A_j$, fals. Cazul $|A_i| = 1$ duce analog la o contradicție. Construim un tablou cu n linii și n coloane în care elementul de pe linia i și coloana j este 1 dacă $j \in A_i$ și 0 dacă $j \notin A_i$. Din proprietatea 2 rezultă că (excluzând diagonala principală ce are numai zerouri) numărul de 1 este egal cu numărul de zerouri. Deci suma elementelor tabloului este $\frac{n^2 - n}{2}$. Cum suma elementelor pe fiecare linie este cel puțin 3 (din observația de la început) rezultă că $\frac{n^2 - n}{n} \geq 3n$, ceea de implică $n \geq 7$. „⇐” Inducție după n. Pentru $n = 7$ afirmația rezultă din a). Presupunem că n este prietenos și fie $A_1, \ldots, A_n$ o familie cu proprietățile pentru n. Pentru $n + 1$ considerăm familia de submulțimi A_i pentru $i = \overline{1, n}$ și $A_{n+1} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Se verifică că satisface cerințele.

III. Să se arate că mijloacele înălțimilor unui triunghi sunt puncte coliniare dacă și numai dacă triunghiul este dreptunghic.

Dorin Popovici

Soluție: Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor BC, CA, AB și A', B', C' mijloacele înălțimilor din A, B, C respectiv. Se observă că $A' \in B_1C_1$ și analoagele. Dacă triunghiul este dreptunghic (în A), atunci $A' \in B_1C_1$, $B' = C_1$, $C' = B_1$, deci punctele sunt coliniare. Dacă triunghiul ABC este ascuțitunghic, atunci toate punctele A', B', C' sunt pe laturile B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 ale triughiului $A_1B_1C_1$ deci nu pot fi coliniare. Dacă ABC este obtuzunghic, atunci exact unul dintre punctele A', B', C' este pe o latură deci toate trei nu pot fi coliniare.

IV. Fie un plan P. Să se arate că nu există funcții $f : P \to P$ cu proprietatea: oricare ar fi A, B, C, D vârfurile unui patrulater convex, atunci $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$, $f(D)$ sunt vârfurile unui patrulater concav.

Dinu Șerbănescu

Soluție: Presupunem prin absurd că o astfel de funcție există. Notăm $f(M) = M'$ și fie $ABCDE$ un pentagon convex. Atunci oricare patru din punctele A', B', C', D', E' sunt vârfurile unui patrulater concav.

Pentru A', B', C', D' considerăm D' în interiorul $\Delta A'B'C'$. Pentru A', B', C', E' rezultă că E' aparține interiorului $\Delta A'B'C'$ sau uneia din zonele hașurate I, II, III. În primul caz, dreapta $D'E'$ taie exact două din laturile $\Delta A'B'C'$; fie de exemplu, $A'B'$ și $A'C'$. Atunci B', C', D', E', sunt vârfurile unui patrulater convex; contradicție.

Dacă E' aparține zonei I, atunci A', D' se află în interiorul $\Delta E'B'C'$ și procedăm ca și în cazul precedent.

CLASA A X-A

I. Fie $OABC$ un tetraedru astfel încât $OA \perp OB \perp OC \perp OA$. Să se arate că dacă r este raza sferei înscrise în tetraedru, iar H este ortocentrul triunghiului ABC, atunci $OH \leq r(\sqrt{3} + 1)$.

Valentin Vornicu

Soluție: Evident din teorema celor trei perpendiculare, $OH \perp (ABC)$.

Notând $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, cu formula lui Heron găsim că

$$16S_{ABC}^2 = (AB+BC+CA)(-AB+BC+CA)(AB-BC+CA)\cdot(AB+BC-CA) =$$
$$= -\sum AB^4 + 2\sum AB^2\cdot AC^2 = -\sum(a^2+b^2)^2 + 2\sum(a^2+b^2)(a^2+c^2) = 4\sum a^2b^2$$

Calculând volumul lui $OABC$ în două moduri avem:

$$3V = OH\cdot S_{ABC} = r\left(\frac{ab+ac+bc}{2} + S_{ABC}\right) \text{ deci}$$

$$OH = \frac{r\left(\dfrac{ab+bc+ca}{2} + \dfrac{\sqrt{\sum a^2b^2}}{2}\right)}{\dfrac{\sqrt{\sum a^2b^2}}{2}} = r\left(\frac{ab+bc+ca}{\sqrt{\sum a^2b^2}} + 1\right)$$

Cu inegalitatea C.-B.-S., avem $\dfrac{ab+bc+ca}{\sqrt{\sum a^2b^2}} \le \sqrt{3}$, de unde rezultă inegalitatea din enunț, cazul de egalitate fiind atins dacă $a = b = c$.

II. Fie z_i, $i = 1, \ldots, 5$, numere complexe astfel încât toate au același modul nenul și $\sum_{i=1}^{5} z_i = \sum_{i=1}^{5} z_i^2 = 0$. Demonstrați că $z_1, \ldots, z_5$ sunt afixele vârfurilor unui pentagon regulat.

Daniel Jinga

Soluție: Fie $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ un polinom având rădăcinile z_k, $k = \overline{1,5}$. Cum $\sum z_k = 0$, rezultă $a = 0$. Avem: $b = \sum_{i<j} z_i z_j = \frac{1}{2}\left(\sum z_k\right)^2 - \frac{1}{2}\sum z_k^2 = 0$.

Conjugând egalitățile din ipoteză și folosind faptul că rădăcinile au același modul, obținem $\sum \dfrac{1}{z_k} = \sum \dfrac{1}{z_k^2} = 0$. Ca mai înainte de aici rezultă $d = c = 0$.

În concluzie $z_1, z_2, \ldots, z_5$ sunt rădăcinile ecuației $z_5 + e = 0$, așadar sunt afixele vârfurilor unui pentagon regulat.

III. Fie a, b, c afixele vârfurilor A, B, C ale unui triunghi cu $|a| = |b| = |c| = 1$. Să se arate că dacă există $\alpha = \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $a + b\cos\alpha + c\sin\alpha = 0$, atunci aria S_{ABC} a triunghiului satisface $1 < S_{ABC} \le \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Gheorghe Iurea

Soluție: Avem $1 = |a^2| = |b\cos\alpha + c\sin\alpha|^2 = (b\cos\alpha + c\sin\alpha)\left(\dfrac{1}{b}\cos\alpha + \dfrac{1}{c}\sin\alpha\right) =$

$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \dfrac{b^2+c^2}{bc}\cos\alpha\sin\alpha$. Deducem $b^2 + c^2 = 0$, adică $c = \pm ib$, deci $\angle BOC = 90°$. Relația $a = -(b\cos\alpha + c\sin\alpha)$ înseamnă că A se găsește pe simetricul $B'C'$

al arcului de cerc cu centrul în O, de rază 1, cu capetele B şi C. Cel mai depărtat punct al arcului $B'C'$ de segmentul BC este mijlocul D al acestui arc care este situat la distanţa $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ de segmentul BC a cărui lungime este $\sqrt{2}$, deci

$$S_{ABC} \le \frac{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

Cele mai apropiate puncte de segmentul BC ale arcului $B'C'$ sunt B' şi C' (A nu poate coincide cu acestea) situate la distanţa $\sqrt{2}$, deci $S_{ABC} > \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 1$.

IV. Fie $A \subset \mathbf{C}$ o mulţime finită cu proprietatea că $z \in A$ implică $z^n \in A$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Demonstraţi că $\sum_{z\in A} z \in \mathbf{Z}$;

b) Demonstraţi că pentru orice $k \in \mathbf{Z}$ se poate alege o mulţime A cu proprietatea din enunţ, pentru care $\sum_{z\in A} z = k$.

Paltin Ionescu

Soluţie:

a) Dacă $z \in A$ atunci $z = 0$ sau există $n \in \mathbf{N}^*$ cu $z^n = 1$. Rezultă că

$$A\setminus\{0\} = \bigcup_{k=1}^{m} U_{n_k}, \text{ unde } U_n = \{z \in \mathbf{C} \mid z_n = 1\}.$$

Dacă notăm $S(A) = \sum_{z\in A} z$ atunci $S(U_n) \in \{0,1\}$. Să remarcăm că $U_{n_1} \cap U_{n_2} \cap \ldots \cap U_{n_k} = U_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)}$ deci cu principiul includerii şi al excluderii, rezultă $S(A) \in \mathbf{Z}$.

b) Să presupunem că pentru $k \in \mathbf{Z}$, mulţimea $A = \bigcup_{k=1}^{m} U_{n_k}$ are $S(A) = k$. Fie $p_1, p_2, \ldots, p_6$ şase numere prime distincte care nu divid nici un n_k. Luând $B = U_{p_1}$ avem $S(A\cup B) = S(A) + S(B) - S(A\cap B) = k + 0 - 1$, aşadar $S(A\cup B) = k - 1$.

Fie acum $C = U_{p_1p_2p_3} \cup U_{p_1p_4p_5} \cup U_{p_2p_4p_6} \cup U_{p_3p_5p_6}$. Oricare două din cele patru mulţimi U de mai sus au intersecţia diferită de U_1, dar oricare trei au intersecţia U_1. rezultă:

$$S(A\cup C) = S(A) + S(U_{p_1p_2p_3}) + S(U_{p_1p_4p_5}) + S(U_{p_2p_4p_6}) + S(U_{p_3p_5p_6}) -$$
$$- S(A\cap U_{p_1p_2p_3}) - \ldots - S(A\cap U_{p_1p_2p_3} \cap U_{p_1p_4p_5} \cap U_{p_2p_4p_6} \cap U_{p_3p_5p_6}) =$$
$$= k+0+0+0+0-1-1-1-1-0-0-0-0-0-0+1+1+1+1+1+1+$$
$$+1+1+1+1-1-1-1-1-1+1 = k+2$$

Aşadar dacă $M = \{k \in \mathbf{Z} \mid$ există A cu proprietatea din enunţ cu $S(A) = k\}$, atunci $k \in M$ implică $k - 1 \in M$ şi $k + 2 \in M$, de unde $M = \mathbf{Z}$.