

$$a^{40} + b^{40} = 1 \Rightarrow b^{40} + \frac{1}{10^{12}} > 1 \Rightarrow b^{40} > 1 - \frac{1}{10^{12}} = 0, \underbrace{99 \dots 9}_{12 \text{ cifre}}.$$

Cum $0 < b < 1$, rezultă $b > b^{40} > 0, \underbrace{99 \dots 9}_{12 \text{ cifre}}$.

IV. Fie tetraedrul $ABCD$ în care G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale fețelor ADC, ABD , respectiv BDC .

a) Arătați că dreptele BG_1, CG_2, AG_3 sunt concurente.

b) Știind că $AG_3 = 8, BG_1 = 12$ și $CG_2 = 20$, calculați valoarea maximă posibilă a volumului tetraedrului $ABCD$.

Laurențiu Panaitopol, Mircea Fianu

Soluție: a) $AG_3 \cap BG_1 = \{G\}$ și $BG_1 \cap CG_2 = \{G'\}$ (diagonale în trapeze).

$$\frac{G_1G}{G_1B} = \frac{G_1G'}{G_1B} \text{ rezultă } G = G'.$$

b) $AG = 6, BG = 9, CG = 15. V_{ABCD} = 4V_{ABCG}$. Valoarea maximă a volumului tetraedrului $ABCG$ este 135. Valoarea maximă a volumului tetraedrului $ABCD$ este 540.

CLASA A IX-A

I. Să se determine numerele naturale nenule a și b cu proprietatea că oricare ar fi $x, y \in [a, b]$ avem $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \in [a, b]$.

Mircea Fianu

Soluție: Fie $x, y \in [a, b]$. Atunci $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$ și $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{a}$, de unde $\frac{2}{b} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{2}{a}$ cu egalitate pentru $x = y = b$, respectiv $x = y = a$. Conform ipotezei, este necesar ca $a \leq \frac{2}{b} \leq \frac{2}{a} \leq b$. Atunci $a^2 \leq 2$, și cum $a \in \mathbf{N}^*$ rezultă că $a = 1$. Din $1 \leq \frac{2}{b} \leq 2$ obținem $b = 2$.

II. Un număr natural $n, n \geq 2$, se numește „prietenos” dacă există o familie de submulțimi nevide A_1, A_2, \dots, A_n ale mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât:

- 1) $i \notin A_i$ pentru orice $i = \overline{1, n}$;
- 2) $i \in A_j$ dacă și numai dacă $j \notin A_i$ pentru orice $i, j \in \{1, \dots, n\}$, distincte;
- 3) $A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru orice $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Să se arate că:

- a) numărul 7 este prietenos;
- b) n este prietenos dacă și numai dacă $n \geq 7$.

Valentin Vornicu

Soluție: a) De exemplu, următoarea familie arată că 7 este prietenos.

$$\begin{aligned} A_1 &= \{2, 3, 4\}, & A_2 &= \{3, 5, 6\}, & A_3 &= \{4, 5, 7\}, \\ A_4 &= \{2, 6, 7\}, & A_5 &= \{1, 4, 6\}, & A_6 &= \{1, 3, 7\}, & A_7 &= \{1, 2, 5\}. \end{aligned}$$

b) „ \Rightarrow ” Arătăm mai întâi că dacă n este prietenos atunci fiecare A_i are cel puțin 3 elemente. Dacă $|A_i| = 2$ atunci $A_i = \{j, k\}$, deci $A_i \cap A_j = \{k\}$ și $A_i \cap A_k = \{j\}$. Rezultă $j \in A_k$ și $k \in A_j$, fals. Cazul $|A_i| = 1$ duce analog la o contradicție. Construim un tablou cu n linii și n coloane în care elementul de pe linia i și coloana j este 1 dacă $j \in A_i$ și 0 dacă $j \notin A_i$. Din proprietatea 2 rezultă că (excluzând diagonala principală ce are numai zerouri) numărul de 1 este egal cu numărul de zerouri. Deci suma elementelor tabloului este $\frac{n^2 - n}{2}$. Cum suma elementelor pe fiecare linie este

cel puțin 3 (din observația de la început) rezultă că $\frac{n^2 - n}{2} \geq 3n$, ceea ce implică $n \geq 7$. „ \Leftarrow ”

Inducție după n . Pentru $n = 7$ afirmația rezultă din a). Presupunem că n este prietenos și fie A_1, \dots, A_n o familie cu proprietățile pentru n . Pentru $n + 1$ considerăm familia de submulțimi A_i pentru $i = 1, n$ și $A_{n+1} = \{1, 2, \dots, n\}$. Se verifică că satisface cerințele.

III. Să se arate că mijloacele înălțimilor unui triunghi sunt puncte coliniare dacă și numai dacă triunghiul este dreptunghic.

Soluție: Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor BC, CA, AB și A', B', C' mijloacele înălțimilor din A, B, C respectiv. Se observă că $A' \in B_1C_1$ și analoge. Dacă triunghiul este dreptunghic (în A), atunci $A' \in B_1C_1, B' = C_1, C' = B_1$, deci punctele sunt coliniare. Dacă triunghiul ABC este ascuțitunghic, atunci toate punctele A', B', C' sunt pe laturile B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 ale triunghiului $A_1B_1C_1$ deci nu pot fi coliniare. Dacă ABC este obtuzunghic, atunci exact unul dintre punctele A', B', C' este pe o latură deci toate trei nu pot fi coliniare.

IV. Fie un plan P . Să se arate că nu există funcții $f: P \rightarrow P$ cu proprietatea: oricare ar fi A, B, C, D vârfurile unui patrulater convex, atunci $f(A), f(B), f(C), f(D)$ sunt vârfurile unui patrulater concav.

Soluție: Presupunem prin absurd că o astfel de funcție există. Notăm $f(M) = M'$ și fie $ABCDE$ un pentagon convex. Atunci oricare patru din punctele A', B', C', D', E' sunt vârfurile unui patrulater concav.

Pentru A', B', C', D' considerăm D' în interiorul $\Delta A'B'C'$. Pentru A', B', C', E' rezultă că E' aparține interiorului $\Delta A'B'C'$ sau uneia din zonele hașurate I, II, III. În primul caz, dreapta $D'E'$ taie exact două din laturile $\Delta A'B'C'$; fie de exemplu, $A'B'$ și $A'C'$. Atunci B', C', D', E' sunt vârfurile unui patrulater convex; contradicție.

Dacă E' aparține zonei I, atunci A', D' se află în interiorul $\Delta E'B'C'$ și procedăm ca și în cazul precedent.

CLASA A X-A

I. Fie $OABC$ un tetraedru astfel încât $OA \perp OB \perp OC \perp OA$. Să se arate că dacă r este raza sferei înscrise în tetraedru, iar H este ortocentrul triunghiului ABC , atunci $OH \leq r(\sqrt{3} + 1)$.

Soluție: Evident din teorema celor trei perpendiculare, $OH \perp (ABC)$.