Din (1) şi (2) rezultă că $\dfrac{RQ}{QT}=\dfrac{MQ}{QP}$ şi cum $m(\angle MQR) = m(\angle TQP)$ (opuse la vârf), rezultă că $TP \parallel MR$.

b) Fie $\{S\} = TP \cap AC$. Deoarece $BP = PC$ şi $TB \parallel CS$ rezultă T, B, S, C sunt vârfurile unui paralelogram. În triunghiul dreptunghic TRS, $[PR]$ este mediană, deci triunghiul RPS este isoscel cu $RP = PS$, deci $m(\angle PRS) = m(\angle PSR)$ rezultă că $\angle MRQ \equiv \angle PRQ$, având complemente congruente.

CLASA A VIII-A

I. Pentru două numere naturale m si n, arătaţi că numărul $5^n + 5^m$ se scrie ca sumă a doua pătrate perfecte dacă si numai dacă $n - m$ este par.

Vasile Zidaru

Soluţie: „$\Leftarrow$" $n - m$ par $\Rightarrow$ m şi n aceeaşi paritate. n şi m pare $\Rightarrow$ $5^{2k}+5^{2p}=(5^k)^2+(5^p)^2$. m şi n impare $\Rightarrow$ $5^{2k+1}+5^{2p+1}=(2\cdot5^k+5^p)^2+(5^k-2\cdot5^p)^2$. „$\Rightarrow$" Presupunem că $n - m$ nu este par $\Rightarrow$ n şi m au parităţi diferite $\Rightarrow$ $5^{2k+1}+5^{2p}=5\cdot25^k+25^p=M_8+6$. Finalizare.

II. La o reuniune au participat 6 elevi. Se ştie că:

i) din orice grup de trei elevi cel puţin doi sunt prieteni;

ii) există şapte perechi de prieteni.

Arătaţi că printre cei 6 elevi:

a) există un elev care are cel puţin trei prieteni:

b) există cel puţin trei elevi care sunt prieteni între ei.

Valentin Vornicu

Soluţie: a) Dacă fiecare elev ar fi prieten cu cel mult 2 elevi, atunci numărul total de perechi ar fi $N \le \dfrac{2\cdot6}{2}=6$ (contradicţie).

b) Alegerea unui elev prieten cu alţi trei. Finalizare.

III. Numerele reale a şi b au proprietăţile:

i) $0<a<b$;

ii) $b-a\ge\dfrac{1}{2}$;

iii) $a^{40}+b^{40}=1$

Arătaţi că în reprezentarea zecimală a lui b, primele 12 cifre de după virgulă sunt egale cu 9.

Mircea Fianu

Soluţie: Din $0 < a < b$ şi $a^{40}+b^{40}=1$, rezultă că $0 < a < b < 1$. Cum $b - a \ge \dfrac{1}{2}$, rezultă că $1-a>\dfrac{1}{2}$, deci $a<\dfrac{1}{2}$. $a^{40}<\dfrac{1}{2^{40}}<\dfrac{1}{1024^4}<\dfrac{1}{10^{12}}$.

$$a^{40}+b^{40}=1 \Rightarrow b^{40}+\frac{1}{10^{12}}>1 \Rightarrow b^{40}>1-\frac{1}{10^{12}}=0,\underbrace{99...9}_{12\,cifre}.$$

Cum $0<b<1$, rezultă $b>b^{40}>0,\underbrace{99...9}_{12\,cifre}$.

IV. Fie tetraedrul $ABCD$ în care G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale fețelor ADC, ABD, respectiv BDC.

a) Arătați că dreptele BG_1, CG_2, AG_3 sunt concurente.

b) Știind că $AG_3 = 8$, $BG_1 = 12$ și $CG_2 = 20$, calculați valoarea maximă posibilă a volumului tetraedrului $ABCD$.

Laurențiu Panaitopol, Mircea Fianu

Soluție: *a)* $AG_3 \cap BG_1 = \{G\}$ *și* $BG_1 \cap CG_2 = \{G'\}$ *(diagonale în trapeze).*

$\frac{G_1G}{G_1B}=\frac{G_1G'}{G_1B}$ rezultă $G = G'$.

b) $AG = 6$, $BG = 9$, $CG = 15$. $V_{ABCD} = 4V_{ABCG}$. Valoarea maximă a volumului tetraedrului $ABCG$ este 135. Valoarea maximă a volumului tetraedrului $ABCD$ este 540.

CLASA A IX-A

I. Să se determine numerele naturale nenule a și b cu proprietatea că oricare ar fi x, $y \in [a, b]$ avem $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\in[a,b]$.

Mircea Fianu

Soluție: Fie x, $y \in [a, b]$. Atunci $\frac{1}{b}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{a}$ și $\frac{1}{b}\le\frac{1}{y}\le\frac{1}{a}$, de unde $\frac{2}{b}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\le\frac{2}{a}$ cu egalitate pentru $x = y = b$, respectiv $x = y = a$. Conform ipotezei, este necesar ca $a\le\frac{2}{b}\le\frac{2}{a}\le b$. Atunci $a^2\le 2$, și cum $a \in \mathbb{N}^*$ rezultă că $a = 1$. Din $1\le\frac{2}{b}\le 2$ obținem $b = 2$.

II. Un număr natural n, $n \ge 2$, se numește „prietenos" dacă există o familie de submulțimi nevide $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ale mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât:

1) $i \notin A_i$ pentru orice $i=\overline{1,n}$;

2) $i \in A_j$ dacă și numai dacă $j \notin A_i$ pentru orice $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, distincte;

3) $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ pentru orice $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Să se arate că:

a) numărul 7 este prietenos ;

b) n este prietenos dacă și numai dacă $n \ge 7$.

Valentin Vornicu

Soluție: a) De exemplu, următoarea familie arată că 7 este prietenos.

$A_1 = \{2, 3, 4\}$, $A_2 = \{3, 5, 6\}$, $A_3 = \{4, 5, 7\}$,
$A_4 = \{2, 6, 7\}$, $A_5 = \{1, 4, 6\}$, $A_6 = \{1, 3, 7\}$, $A_7 = \{1, 2, 5\}$.