

A 54-A OLIMPIADĂ NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Sibiu, 21 aprilie 2003

CLASA A VII-A

I. Calculați numărul maxim de elemente care pot fi alese din mulțimea $\{1, 2, 3, \dots, 2003\}$ astfel încât suma oricăror două elemente alese să nu fie divizibilă cu 3.

Soluție: Submulțimea numerelor care sunt divizibile cu 3 este $M = \{3, 6, 9, \dots, 2001\}$. M are 667 elemente și mulțimea căutată conține cel mult unul din acestea. Celelalte numere pot fi distribuite în două submulțimi $A = \{1, 4, 7, \dots, 2002\}$ și $B = \{2, 5, 8, \dots, 2003\}$. Card $A =$ Card $B = 668$. Suma oricărui element din A și a unui element din B este divizibilă cu 3, deci mulțimea căutată poate conține cele 668 de elemente ale lui A (sau B) împreună cu un multiplu de 3, deci numărul maxim este 669.

Liviu Vlaicu

II. Calculați valoarea maximă posibilă a ariei unui triunghi care are două mediane de lungimi 1 și 2.

Laurențiu Panaitopol

Soluție: Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC . $BG = \frac{2}{3}$ și $GC = \frac{4}{3}$.

$$A_{BGC} = \frac{1}{3} A_{ABC}, \quad A_{BGC} = \frac{BG \cdot GC \cdot \sin \hat{BGC}}{2} \text{ maximă când } m(\angle BGC) = 90^\circ. \quad A_{\max} = \frac{4}{3}.$$

III. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $A_n = \sqrt{49n^2 + 0,35n}$.

a) Calculați primele trei zecimale ale numărului A_1 .

b) Arătați că primele trei zecimale ale numerelor A_n și A_1 sunt aceleași, oricare ar fi n , natural, nenul.

Dinu Șerbănescu

Soluție: a) $A_1 = \sqrt{49,35} = 7,024\dots > 7,024$.

b) $A_n = \sqrt{\left(7n + \frac{5}{200}\right)^2 - \left(\frac{5}{200}\right)^2} < 7n,025, \forall n$. Cum $A_n > A_1$ rezultă $A_n > 7n,024$, deci

primele 3 zecimale ale numerelor A_n sunt 024.

IV. Se da triunghiul ABC în care P este mijlocul laturii BC . Fie $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $MN \parallel BC$ și $\{Q\} = MP \cap BN$. Perpendiculara din Q pe dreapta AC intersectează pe AC în R și paralela prin B la AC în T .

Arătați că: a) $TP \parallel MR$; b) $\angle MRQ = \angle PRQ$.

Virgil Nicula, Mircea Fianu

Soluție: a) Din teorema fundamentală a asemănării rezultă că $\triangle QBT \sim \triangle QNR$, deci

$$\frac{RQ}{QT} = \frac{NQ}{QB}. \quad (1) \text{ Deoarece } MN \parallel BC \text{ rezultă } \triangle QBP \sim \triangle QNM, \text{ deci } \frac{NQ}{QB} = \frac{MQ}{QP}. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că $\frac{RQ}{QT} = \frac{MQ}{QP}$ și cum $m(\angle MQR) = m(\angle TQP)$ (opuse la vârf),

rezultă că $TP \parallel MR$.

b) Fie $\{S\} = TP \cap AC$. Deoarece $BP = PC$ și $TB \parallel CS$ rezultă T, B, S, C sunt vârfurile unui paralelogram. În triunghiul dreptunghic TRS , $[PR]$ este mediană, deci triunghiul RPS este isoscel cu $RP = PS$, deci $m(\angle PRS) = m(\angle PSR)$ rezultă că $\angle MRQ \equiv \angle PRQ$, având complemente congruente.

CLASA A VIII-A

I. Pentru două numere naturale m și n , arătați că numărul $5^n + 5^m$ se scrie ca sumă a două pătrate perfecte dacă și numai dacă $n - m$ este par.

Vasile Zidaru

Soluție: „ \Leftarrow ” $n - m$ par $\Rightarrow m$ și n aceeași paritate. n și m pare $\Rightarrow 5^{2k} + 5^{2p} = (5^k)^2 + (5^p)^2$. m și n impare $\Rightarrow 5^{2k+1} + 5^{2p+1} = (2 \cdot 5^k + 5^p)^2 + (5^k - 2 \cdot 5^p)^2$. „ \Rightarrow ” Presupunem că $n - m$ nu este par $\Rightarrow n$ și m au parități diferite $\Rightarrow 5^{2k+1} + 5^{2p} = 5 \cdot 25^k + 25^p = M_8 + 6$. Finalizare.

II. La o reuniune au participat 6 elevi. Se știe că:

- din orice grup de trei elevi cel puțin doi sunt prieteni;
- există șapte perechi de prieteni.

Arătați că printre cei 6 elevi:

- există un elev care are cel puțin trei prieteni;
- există cel puțin trei elevi care sunt prieteni între ei.

Valentin Vornicu

Soluție: a) Dacă fiecare elev ar fi prieten cu cel mult 2 elevi, atunci numărul total de perechi ar fi $N \leq \frac{2 \cdot 6}{2} = 6$ (contradicție).

b) Alegerea unui elev prieten cu alți trei. Finalizare.

III. Numerele reale a și b au proprietățile:

- $0 < a < b$;
- $b - a \geq \frac{1}{2}$;
- $a^{40} + b^{40} = 1$

Arătați că în reprezentarea zecimală a lui b , primele 12 cifre de după virgulă sunt egale cu 9.

Mircea Fianu

Soluție: Din $0 < a < b$ și $a^{40} + b^{40} = 1$, rezultă că $0 < a < b < 1$. Cum $b - a \geq \frac{1}{2}$,

rezultă că $1 - a > \frac{1}{2}$, deci $a < \frac{1}{2}$. $a^{40} < \frac{1}{2^{40}} < \frac{1}{1024^4} < \frac{1}{10^{12}}$.