

$f(I_k) \subset [k, \infty)$ . Atunci există un  $x_n \in \mathbb{Q} \cap I_{n-1}$  cu  $f(x_n) \geq n$ ; luăm o vecinătate a lui  $x_n$ ,  $I_n = [\alpha_n, \beta_n] \subset I_{n-1}$ , pe care  $f(x) \geq f(x_n) \geq n$ .

Din  $\alpha_k \nearrow, \beta_k \searrow, \alpha_k < \beta_k$ , există  $\gamma \in \bigcap_{n \geq 0} I_n$ , deci  $f(\gamma) \geq n \forall n$ , absurd.

### CLASA A XII-A

**Subiectul 1.** Funcția  $f$ , fiind continuă pe  $\mathbb{R}$ , admite o primitivă  $F$ . Relația dată este echivalentă cu

$$(1) \quad n^2 \left( F \left( x + \frac{1}{n} \right) - F(x) \right) = nf(x) + \frac{1}{2},$$

pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  și orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Prin urmare,  $f$  este derivabilă și, derivând în (1), obținem

$$(2) \quad n \left( f \left( x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right) = f'(x)$$

pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  și orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Din (2) rezultă că  $f$  este de două ori derivabilă și are loc relația

$$n \left( f' \left( x + \frac{1}{n} \right) - f'(x) \right) = f''(x),$$

deci  $f''$  este continuă

Fie  $x \in \mathbb{R}$  arbitrar, dar fixat. Aplicând teorema lui Lagrange, din relația (2), deducem existența unui punct  $c_n = c_n(x) \in (x, x + \frac{1}{n})$ , cu proprietatea  $f'(c_n) = f'(x)$ .

Teorema lui Rolle aplicată funcției  $f'$ , pe intervalul determinat de  $x$  și  $c_n$ , asigură existența unui punct  $\zeta_n$  din acest interval, cu proprietatea că

$$(3) \quad f''(\zeta_n) = 0.$$

Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = x$ , din continuitatea lui  $f''$ , folosind (3), vom avea

$$f''(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f''(\zeta_n) = 0.$$

Deoarece  $x$  a fost ales arbitrar, rezultă că  $f$  are forma  $f(x) = ax + b$ , cu  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Prin înlocuire în ecuația din enunț se găsește  $a = 1$ ,  $b$  arbitrar.

În concluzie, funcțiile căutate au forma  $f(x) = x + b$

**Subiectul 2.** a) Dacă  $\widehat{x} = \widehat{y}$  în  $\mathbb{Z}_n$ , atunci există  $k \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $x - y = kn$ .

Avem

$$f(x) - f(y) = (x - y)g(x, y),$$

unde  $g(x, y)$  este un întreg. Deci  $f(x) - f(y)$  este multiplu de  $n$  și prin urmare  $\widehat{f(x)} = \widehat{f(y)}$ , i.e.  $f_n(\widehat{x}) = f_n(\widehat{y})$ .

b) Vom arăta mai întâi că  $\text{grad } f \leq 1$ . Să presupunem, prin reducere la absurd, că  $\text{grad } f = k \geq 2$ . Polinomul  $g(X) = f(X + 1) - f(X)$  are gradul  $k - 1$ . Cum  $k - 1 \geq 1$ , există  $x \in \mathbb{Z}$ , astfel încât  $|g(x)| \geq 2$ . Fie  $n = |g(x)| = |f(x + 1) - f(x)|$ .

În inelul  $\mathbb{Z}_n$  avem  $f(\widehat{x + 1}) = \widehat{f(x)}$ , deci  $f_n(\widehat{x + 1}) = f_n(\widehat{x})$ . Ultima relație arată că  $f_n$  nu este injectivă, deci nici surjectivă.

Evident  $f$  nu poate fi constant. Fie  $m \in \mathbb{Z}^*$  și  $a \in \mathbb{Z}$ , astfel încât, pentru orice  $x \in \mathbb{Z}$ , avem  $f(x) = mx + a$ .

Vom arăta că  $|m| = 1$ . Într-adevăr, dacă  $|m| \geq 2$ , funcția  $f_{|m|} : \mathbb{Z}_{|m|} \rightarrow \mathbb{Z}_{|m|}$  este constantă, deci nu este surjectivă.

Se verifică ușor că polinoamele de forma  $X + a$  și  $-X + a$  verifică condițiile problemei.

**Subiectul 3.** Unicul polinom  $p$  de grad 1, care satisface relațiile  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx = 1$ , este  $p(x) = 6x - 2$ .

Prin urmare

$$\int_0^1 (f(x) - p(x)) dx = \int_0^1 x(f(x) - p(x)) dx = 0.$$

De aici

$$\int_0^1 p(x)(f(x) - p(x)) dx = 0.$$

Atunci

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 (f(x) - p(x))^2 dx = \int_0^1 f(x)(f(x) - p(x))^2 dx \\ &= \int_0^1 f^2(x) dx - 6 \int_0^1 xf(x) dx + 2 \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f^2(x) dx - 4. \end{aligned}$$

În concluzie

$$4 \leq \int_0^1 f^2(x) dx.$$

**Subiectul 4.** Fie  $m \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $p = 4m + 1$ .

a) Din teorema lui Wilson avem  $p!(p - 1)! + 1$ , deci  $(p - 1)! + 1 = 0$ , în  $K$ . Prin urmare,  $(4m)! = -1$ , în  $K$ .

Pe de altă parte, cum  $1 = -4m, 2 = -(4m - 1), \dots, 2m = -(2m + 1)$ , în  $K$ , avem

$$-1 = (-1)^{2m} (4m)^2 (4m - 1)^2 \cdots (2m + 1)^2,$$

de unde

$$-1 = [(4m)(4m - 1) \cdots (2m + 1)]^2,$$

în  $K$ . Rezultă că  $-1$  este pătrat perfect în  $K$ .

b) Fie  $a, b \in K^*$  două elemente care comută. Atunci

$$(1) \quad (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

și

$$(2) \quad (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

Alegem  $b = 2^{-1}$ . Dacă  $a \in K$  atunci  $a$  și  $2^{-1}$  comută.

Dacă  $a \neq -2^{-1}$ , din (1), deducem  $a = (a + 2^{-1})^2 - a^2 - b^2 = (a + 2^{-1})^2 + a_1^2 + b_1^2$ , deoarece  $-1$  este pătrat perfect în  $K$ .

Dacă  $a = -2^{-1}$ , atunci  $a \neq b$ . Din (2) avem  $a = a^2 + b^2 - (a - b)^2 = a^2 + b^2 + c^2$ , deoarece  $-1$  este pătrat perfect în  $K$ .

Așadar, orice  $a \in K^*$  se scrie ca sumă a trei pătrate nenule ale unor elemente din  $K$ .

*Observație:* În  $\mathbb{Z}_5$ ,  $\hat{0}$  nu se poate scrie ca suma a trei pătrate perfecte.