de unde $x = y = z$, adică tetraedrul este regulat.

Subiectul 3. Evident $a > 1$, deci $n^2 = 2^a + \log_2 a > 2^a$, de unde rezultă $2\log_2 n > a$.

Pentru cealaltă inegalitate, avem $n^2 = 2^a + \log_2 a < 2^a + \log_2(2\log_2 n)$, deci $a > \log_2(n^2 - \log_2(2\log_2 n)) = 2\log_2 n + \log_2\left(1 - \frac{\log_2(2\log_2 n)}{n^2}\right)$.

Rămâne de arătat că $\log_2\left(1 - \frac{\log_2(2\log_2 n)}{n^2}\right) > -\frac{1}{n}$ sau $\left(1 - \frac{\log_2(2\log_2 n)}{n^2}\right)^n > \frac{1}{2}$. Cu inegalitatea lui Bernoulli este suficient să arătăm $1 - \frac{\log_2(2\log_2 n)}{n} > \frac{1}{2}$, adică $\frac{\log_2(2\log_2 n)}{n} < \frac{1}{2}$.

Această inegalitate devine $2\log_2 n < 2^{\frac{n}{2}}$, sau $\log_2 n < 2^{\frac{n-2}{2}}$, care se demonstrează prin inducţie.

Subiectul 4. Fie $n, p \geqslant 1$. Notăm $A_{n,p}$ imaginea în planul P_n a mulţimii X_{n+p}, după proiecţia succesivă pe planele $P_{n+p-1}, \ldots, P_n$. Evident $A_{n,p}$ este o submulţime nevidă a lui X_n. Cum X_{n+p+1} se proiectează pe planul P_{n+p} într-o submulţime a lui X_{n+p} rezultă $A_{n,p+1} \subseteq A_{n,p}$. Pentru fiecare n obţinem un şir descrescător de mulţimi nevide $X_n \supseteq A_{n,1} \supseteq A_{n,2} \supseteq \cdots \supseteq A_{n,p} \supseteq \cdots$.

Cum X_n e finită, există $p \geqslant 1$ cu proprietatea $A_{n,k} = A_{n,p}$, oricare ar fi $k \geqslant p$. Notăm T_n această submulţime $A_{n,p}$ a lui X_n. Pentru p suficient de mare, $A_{n,p} = T_n$, $A_{n+1,p-1} = T_{n+1}$, deci T_n este proiecţia lui T_{n+1} pe planul P_n. Alegem p_1 arbitrar in T_1. Există p_2 în T_2 astfel încât p_1 să fie proiecţia lui p_2 pe P_1. Construim inductiv şirul $(p_n)_{n\geqslant 1}$ astfel încât $p_n \in T_n$, $p_{n+1} \in T_{n+1}$ şi este ales astfel ca p_n să fie proiecţia lui p_{n+1} pe P_n, ceea ce voiam să obţinem.

Dacă mulţimile sunt infinite, considerăm planele P_n de ecuaţie $z = n$ şi mulţimile $X_n = \{(x, 0, n) \mid x \geqslant n\}$. Se observă că afirmaţia din enunţ nu e valabilă.

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Fie $FB_k = t_k$, α unghiul format de $(FB_1$ cu Ox şi $\alpha_k = \alpha + \frac{2(k-1)\pi}{n}$. Atunci B_k are coordonatele $\left(\frac{p}{2} + t_k\cos\alpha_k, t_k\sin\alpha_k\right)$.

Avem $t_k^2\sin^2\alpha_k = p^2 + 2pt_k\cos\alpha_k$. Rădăcina pozitivă a acestei ecuaţii este $t_k = \frac{p}{1-\cos\alpha_k}$.

Observăm că $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{t_k} = \frac{n}{p} - \frac{1}{p}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\left(\alpha + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right) = \frac{n}{p}$.

Din inegaliatea lui Cauchy rezultă

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{t_k}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} t_k\Big) \geqslant n^2.$$

deci $\sum\limits_{k=1}^{n} t_k \geqslant np$ pentru egalitate ar trebui ca $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = r$, ceea ce este imposibil, deoarece cercul de centru F şi rază r taie parabola în cel mult două puncte.

Observaţie: Se poate demonstra că $\sum\limits_{k=1}^{n} t_k = \frac{n^2 p}{1-\cos n\alpha}$.

Subiectul 2. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se verifică $\operatorname{rang}(AB) - \operatorname{rang}(BA) = 1$.

Când $n = 2p$, alegem $A_{2p} = \begin{pmatrix} A & & & 0 \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A \end{pmatrix}$, $B_{2p} = \begin{pmatrix} B & & & 0 \\ & B & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B \end{pmatrix}$.

Când $n = 2p + 1$, alegem $A_{2p+1} = \begin{pmatrix} A_{2p} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_{2p+1} = \begin{pmatrix} B_{2p} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Presupunem că $\operatorname{rang}(XY) \geqslant \operatorname{rang}(YX)$; atunci

(1) $$\operatorname{rang}(XY) - \operatorname{rang}(YX) \leqslant \operatorname{rang}(XY) \leqslant \operatorname{rang}(X).$$

Din inegalitatea lui Sylvester, $\operatorname{rang}(YX) \geqslant \operatorname{rang}(X) + \operatorname{rang}(Y) - n$, de unde rezultă $\operatorname{rang}(XY) - \operatorname{rang}(YX) \leqslant \operatorname{rang}(Y) + n - \operatorname{rang}(X) - \operatorname{rang}(Y)$, sau

(2) $$\operatorname{rang}(XY) - \operatorname{rang}(YX) \leqslant n - \operatorname{rang}(X).$$

Din (1) şi (2) rezultă $\operatorname{rang}(XY) - \operatorname{rang}(YX) \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$

Subiectul 3. a) Fie $f(x) \in \operatorname{Im} f$, cu $x \in (a, b)$. Alegem $r_x \in \mathbb{Q} \cap [a_x, b_x]$ şi conform ipotezei, $f(x) = f(r_x)$. Rezultă $\operatorname{Im} f = \{f(r_x) \mid x \in (a, b)\}$.

Dacă notăm $\{r_x \mid x \in (a, b)\} = \{q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots\}$, atunci $\operatorname{Im} f = \{f(q_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ este cel mult numărabilă.

b) Dacă f este continuă, demonstrăm că f este constantă. Presupunem prin absurd că f ia cel puţin două valori diferite pe care le notăm λ şi μ, cu $\lambda < \mu$. Funcţia f are proprietatea lui Darboux, deci $[\lambda, \mu] \subset \operatorname{Im} f$. Aceasta este în contradicţie cu faptul că $\operatorname{Im} f$ este cel mult numărabilă, deci f este funcţie constantă.

Subiectul 4. a) Definim $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{p}, & x = \frac{n}{p},\ (n, p) = 1,\ p > 0 \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Se observă că $x = \frac{n}{p}$ este punct de minim local strict pentru că există o vecinătate a lui x care nu conţine fracţii cu numitor $1, 2, \ldots, p$.

b) Funcţia $f(\frac{n}{p}) = p$ are proprietăţile cerute.

c) Presupunem că f are proprietatea $(*)$. Fie $I_0 = [\alpha_0, \beta_0]$ un interval nedegenerat şi $I_k = [\alpha_k, \beta_k]$, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$ un şir descrecător de intervale astfel ca

$f(I_k) \subset [k, \infty)$. Atunci există un $x_n \in \mathbb{Q} \cap I_{n-1}$ cu $f(x_n) \geqslant n$; luăm o vecinătate a lui x_n, $I_n = [\alpha_n, \beta_n] \subset I_{n-1}$, pe care $f(x) \geqslant f(x_n) \geqslant n$.

Din $\alpha_k \nearrow$, $\beta_k \searrow$, $\alpha_k < \beta_k$, există $\gamma \in \bigcap\limits_{n \geqslant 0} I_n$, deci $f(\gamma) \geqslant n\ \forall n$, absurd.

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Funcția f, fiind continuă pe $\mathbb{R}$, admite o primitivă F. Relația dată este echivalentă cu

$$(1) \qquad n^2\left(F\left(x+\frac{1}{n}\right)-F(x)\right)=nf(x)+\frac{1}{2},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Prin urmare, f este derivabilă și, derivând în (1), obținem

$$(2) \qquad n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right)=f'(x)$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Din (2) rezultă că f este de două ori derivabilă și are loc relația

$$n\left(f'\left(x+\frac{1}{n}\right)-f'(x)\right)=f''(x),$$

deci f'' este continuă

Fie $x \in \mathbb{R}$ arbitrar, dar fixat. Aplicând teorema lui Lagrange, din relația (2), deducem existența unui punct $c_n = c_n(x) \in \left(x, x+\frac{1}{n}\right)$, cu proprietatea $f'(c_n) = f'(x)$.

Teorema lui Rolle aplicată funcției f', pe intervalul determinat de x și c_n, asigură existența unui punct ζ_n din acest interval, cu proprietatea că

$$(3) \qquad f''(\zeta_n)=0.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = x$, din continuitatea lui f'', folosind (3), vom avea

$$f''(x)=\lim_{n\to\infty} f''(\zeta_n)=0.$$

Deoarece x a fost ales arbitrar, rezultă că f are forma $f(x) = ax + b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

Prin înlocuire în ecuația din enunț se găsește $a = 1$, b arbitrar.

În concluzie, funcțiile căutate au forma $f(x) = x + b$