

Să aplicăm această observație pentru $i = 1$; dacă $x_1 \in B_1$ continuăm; dacă nu, înlocuim un $y_1 \in B_1$ cu x_1 . Continuăm acum cu $i = 2$, apoi 3, etc. La fiecare pas, elementul x_i găsit va fi diferit de toate celelalte dinainte. Construim $Y = \{x_i \mid i = 1, \dots, p\}$. Y va intersecta fiecare mulțime B_i (în starea în care a ajuns) în exact un element, anume x_i . Acum, înlocuim înapoi pe x_i cu y_i , pentru a obține submulțimile B_i originale; intersecția lui Y cu B_i va deveni vidă dacă $y_i \notin Y$, sau va conține un element și anume y_i , dacă $y_i \in Y$.

CLASA A X-A

Subiectul 1. Presupunem că există $x, y \in \mathbb{R}$ cu $f(x) - x > f(y) - y$.

Notând $p = f(x) - x$, $q = f(y) - y$ rezultă că $f(x + np) = x + (n + 1)p$, $f(y + nq) = y + (n + 1)q$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Trebuie ca $|f(x + np) - f(y + nq)| \leq |x + np - y - nq|$, adică $|x - y + (n + 1)(p - q)| \leq |x - y + n(p - q)|$.

Pentru n suficient de mare, obținem $x - y + (n + 1)(p - q) \leq x - y + n(p - q)$ adică $p \leq q$, o contradicție care ne arată că $f(x) - x = f(y) - y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, adică $f(x) - x = f(0) - 0 \stackrel{\text{not}}{=} a$.

Subiectul 2. Fie $ABCD$ tetraedrul. Este cunoscută relația

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

Fie a măsura unghiului dintre muchiile opuse. Obținem

$$\cos a \cdot (\pm AB \cdot CD \pm AC \cdot BD \pm AD \cdot BC) = 0,$$

cu o anumită alegere a semnelor $+$, $-$.

Dacă avem $\cos a \neq 0$, atunci $\pm AB \cdot CD \pm AC \cdot BD \pm AD \cdot BC = 0$, și deducem că unul din numerele $AB \cdot CD$, $AC \cdot BD$, $AD \cdot BC$ este egal cu suma celorlalte două. Aceasta contrazice inegalitatea Ptolemeu.

Prin urmare, $\cos a = 0$, adică muchiile opuse sunt perpendiculare. Se arată ușor că în acest caz, $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

Cum din ipoteză $AB = CD$, $AC = BD$ și $AD = BC$, rezultă că toate cele șase muchii au aceeași lungime, așadar $ABCD$ este regulat.

Soluție alternativă:

Se demonstrează că $2|\cos a| \cdot AB \cdot CD = |AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2|$.

Notând cu x, y, z lungimile muchiilor, obținem

$$\frac{|x^2 - y^2|}{z^2} = \frac{|y^2 - z^2|}{x^2} = \frac{|z^2 - x^2|}{y^2}$$

de unde $x = y = z$, adică tetraedrul este regulat.

Subiectul 3. Evident $a > 1$, deci $n^2 = 2^a + \log_2 a > 2^a$, de unde rezultă $2 \log_2 n > a$.

Pentru cealaltă inegalitate, avem $n^2 = 2^a + \log_2 a < 2^a + \log_2(2 \log_2 n)$, deci $a > \log_2(n^2 - \log_2(2 \log_2 n)) = 2 \log_2 n + \log_2 \left(1 - \frac{\log_2(2 \log_2 n)}{n^2}\right)$.

Rămâne de arătat că $\log_2 \left(1 - \frac{\log_2(2 \log_2 n)}{n^2}\right) > -\frac{1}{n}$ sau $\left(1 - \frac{\log_2(2 \log_2 n)}{n^2}\right)^n > \frac{1}{2}$. Cu inegalitatea lui Bernoulli este suficient să arătăm $1 - \frac{\log_2(2 \log_2 n)}{n} > \frac{1}{2}$, adică $\frac{\log_2(2 \log_2 n)}{n} < \frac{1}{2}$.

Această inegalitate devine $2 \log_2 n < 2^{\frac{n}{2}}$, sau $\log_2 n < 2^{\frac{n-2}{2}}$, care se demonstrează prin inducție.

Subiectul 4. Fie $n, p \geq 1$. Notăm $A_{n,p}$ imaginea în planul P_n a mulțimii X_{n+p} , după proiecția succesivă pe planele P_{n+p-1}, \dots, P_n . Evident $A_{n,p}$ este o submulțime nevidă a lui X_n . Cum X_{n+p+1} se proiectează pe planul P_{n+p} într-o submulțime a lui X_{n+p} rezultă $A_{n,p+1} \subseteq A_{n,p}$. Pentru fiecare n obținem un șir descrescător de mulțimi nevide $X_n \supseteq A_{n,1} \supseteq A_{n,2} \supseteq \dots \supseteq A_{n,p} \supseteq \dots$.

Cum X_n e finită, există $p \geq 1$ cu proprietatea $A_{n,k} = A_{n,p}$, oricare ar fi $k \geq p$. Notăm T_n această submulțime $A_{n,p}$ a lui X_n . Pentru p suficient de mare, $A_{n,p} = T_n$, $A_{n+1,p-1} = T_{n+1}$, deci T_n este proiecția lui T_{n+1} pe planul P_n . Alegem p_1 arbitrar în T_1 . Există p_2 în T_2 astfel încât p_1 să fie proiecția lui p_2 pe P_1 . Construim inductiv șirul $(p_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $p_n \in T_n$, $p_{n+1} \in T_{n+1}$ și este ales astfel ca p_n să fie proiecția lui p_{n+1} pe P_n , ceea ce voiam să obținem.

Dacă mulțimile sunt infinite, considerăm planele P_n de ecuație $z = n$ și mulțimile $X_n = \{(x, 0, n) \mid x \geq n\}$. Se observă că afirmația din enunț nu e valabilă.

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Fie $FB_k = t_k$, α unghiul format de $(FB_1$ cu Ox și $\alpha_k = \alpha + \frac{2(k-1)\pi}{n}$. Atunci B_k are coordonatele $\left(\frac{p}{2} + t_k \cos \alpha_k, t_k \sin \alpha_k\right)$.

Avem $t_k^2 \sin^2 \alpha_k = p^2 + 2pt_k \cos \alpha_k$. Rădăcina pozitivă a acestei ecuații este $t_k = \frac{p}{1 - \cos \alpha_k}$.

Observăm că $\sum_{k=1}^n \frac{1}{t_k} = \frac{n}{p} - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n \cos \left(\alpha + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right) = \frac{n}{p}$.

Din inegalitatea lui Cauchy rezultă

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{t_k}\right) \left(\sum_{k=1}^n t_k\right) \geq n^2,$$