din feţele cubului dat. Rezultă că cele 1001 centre se află în cele 1000 de cuburi de latură $\frac{1}{2}$ interioare cubului dat. Atunci două din centrele cuburilor unitate se află în interiorul sau pe feţele unui cub de latură $\frac{1}{2}$, de unde rezultă concluzia.

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Cum $x+y|xf(x)+yf(y)$ şi $x+y|xf(y)+yf(y)$ rezultă că $x+y|x(f(y)-f(x))$.

Pentru $y=x+1$ obţinem $2x+1|x(f(x+1)-f(x))$ şi cum $(2x+1,x)=1$, rezultă că $2x+1|f(x+1)-f(x)$.

In particular, rezulta că $f(x+1)-f(x)\geqslant 2x+1$, $\forall x\in\overline{1,9}$, deci

$$\sum_{x=1}^{9}(f(x+1)-f(x))\geqslant\sum_{x=1}^{9}(2x+1).$$

Rezultă că $f(10)\geqslant f(1)+99\geqslant 100$ deci $f(10)=100$ şi $f(1)=1$.

Din $f(x+1)-f(x)=2x+1$, $\forall x\in\overline{1,9}$, obţinem $f(x)=x^2$.

Subiectul 2. Cum ecuaţiile $x^2+kx+k-1=0$, $k=\overline{2,n}$ şi $2x^2+4x+2=0$, $x^2+4x+4=0$ au proprietatea din enunţ rezultă că $P(n)>n$.

Dacă f este o funcţie cu proprietatea din enunţ, atunci $f(x)=a(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)$ cu $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{Z}$, a, $a(\alpha_1+\alpha_2)$, $a\alpha_1\alpha_2\in\{1,2,\ldots,n\}$.

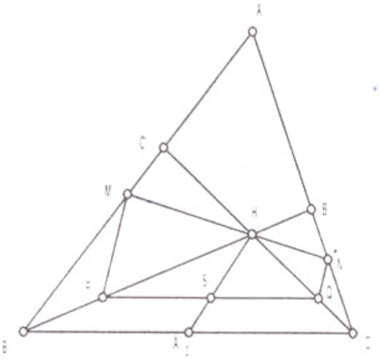
In particular, avem $\alpha_2\leqslant\dfrac{n}{a\alpha_1}$. Obţinem

$$P(n)\leqslant\sum_{\substack{1\leqslant\alpha_1\leqslant n\\ 1\leqslant a\leqslant n}}\frac{n}{a\alpha_1}=n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^2.$$

Cum $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\sqrt{n}$ pentru orice $n\geqslant 5$ (inducţie după n), iar $P(4)=5$ rezultă că $P(n)<n^2$.

Subiectul 3. Din asemănările:

$$\Delta HMP\sim\Delta HB'N,\quad \Delta HNQ\sim\Delta HC'M,\quad \Delta HBC'\sim\Delta HCB'.$$



rezultă că

$$\frac{HP}{HN} = \frac{HM}{HB'}, \quad \frac{HQ}{HM} = \frac{HN}{HC'}, \quad \frac{HB'}{HC'} = \frac{HC}{HB}.$$

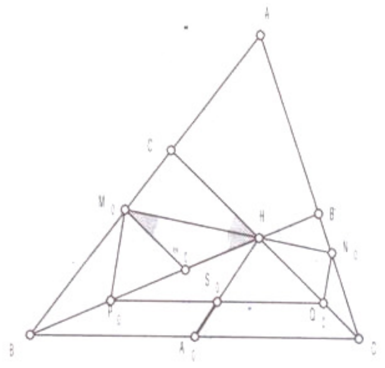
Deci

$$\frac{HP}{HB} = \frac{HQ}{HC}.$$

Prin urmare, segmentele $[PQ]$ şi $[BC]$ sunt paralele. Deducem că mijlocul S al segmentului $[PQ]$ se află pe dreapta fixă HA_0, unde A_0 este mijlocul segmentului $[BC]$.

Fie acum S un punct al locului şi $[PQ]$ segmentul corespunzător. Punctul corespunzător M este unul din punctele M_1, M_2 în care cercul de diametru $[HP]$ intersectează segmentul $[AB]$. Dreapta M_kH va intersecta segmentul $[AC]$ în punctul N_k, $k = 1, 2$. Perpendiculara în N_k pe dreapta M_kN_k va intersecta pe CC' în punctul Q_k, $k = 1, 2$. Conform primei părţi a demonstraţiei, $PQ_k||BC$, $k = 1, 2$. Dar şi $PQ||BC$, deci $Q_k = Q$, $k = 1, 2$. Din cele de mai sus rezultă că una dintre configuraţiile limită corespunde cazului în care cercul de diametru $[HP]$ este tangent la BC'.

Fie M_0 punctul de tangenţa şi ω_0 centrul acestui cerc.



Dreptele $\omega_0 M_0$ şi HC' sunt paralele, deoarece sunt perpendiculare pe dreapta BC'. Prin urmare $\angle\omega_0 M_0 H \equiv \angle M_0 HC'$. Dar $\angle\omega_0 M_0 H \equiv \angle\omega_0 H M_0$, de unde deducem că HM_0 este bisectoarea interioară a unghiului $\angle BHC'$.

Fie S_0 punctul corespunzător acestei configuraţii. Locul geometric cerut va fi segmentul $[A_0 S_0]$ situat pe dreapta HA_0, poziţia limită A_0 fiind atinsă când d coincide cu una dintre înălţimile BB' sau CC'.

Remarcă: Din cele de mai sus rezultă că atunci când d se roteşte în jurul ortocentrului H, rămânând în interiorul unghiurilor $\angle BHC'$ şi $\angle CHB'$, punctul S parcurge segmentul $[A_0 S_0]$ dus-întors: dreptelor $d_1 = M_1 H N_1$ şi $d_2 = M_2 H N_2$, $M_1, M_2 \in [BC']$ şi $N_1, N_2 \in [CB']$, egal înclinate (izogonale) faţă de bisectoarea interioară HM_0 a unghiului $\angle BHC'$, le corespund aceleaşi puncte P şi Q, deci acelaşi punct S.

Subiectul 4. a) Alegem o partiţie a lui X în trei mulţimi cu trei elemente: B_1, B_2, B_3 şi B_4 o submulţime arbitrară a lui X cu trei elemente. Din principiul cutiei, o submulţime a lui X cu patru elemente va intersecta cel puţin una dintre mulţimile B_1, B_2, B_3 în cel puţin 2 elemente.

b) Dacă X are $pq - q = (p-1)q$ elemente, să alegem $p-1$ submulţimi B_i, $i = 1, \ldots, p-1$ cu câte q elemente, care să formeze o partiţie a lui X şi B_p arbitrară cu q elemente. Orice submulţime Y cu p elemente va intersecta în mod necesar măcar una din mulţimile B_i, $i = 1, \ldots, p-1$ în cel puţin 2 elemente (principiul cutiei).

c) Pentru i fixat, să observăm că $\bigcup\limits_{j \neq i} B_j$ conţine cel mult $(p-1)q$ elemente; dar X conţine $pq - q + 1 = (p-1)q + 1$ elemente, deci există întotdeauna măcar un element x_i disponibil, care nu aparţine nici unui B_j, $j \neq i$.

Să aplicăm această observaţie pentru $i = 1$; dacă $x_1 \in B_1$ continuăm; dacă nu, înlocuim un $y_1 \in B_1$ cu x_1. Continuăm acum cu $i = 2$, apoi 3, etc. La fiecare pas, elementul x_i găsit va fi diferit de toate celelalte dinainte. Construim $Y = \{x_i \mid i = 1, \ldots, p\}$ Y va intersecta fiecare mulţime B_i (în starea în care a ajuns) în exact un element, anume x_i. Acum, înlocuim înapoi pe x_i cu y_i, pentru a obţine submulţimile B_i originale; intersecţia lui Y cu B_i va deveni vidă dacă $y_i \notin Y$, sau va conţine un element şi anume y_i, dacă $y_i \in Y$.

CLASA A X-A

Subiectul 1. Presupunem că există $x, y \in \mathbb{R}$ cu $f(x) - x > f(y) - y$.

Notând $p = f(x) - x$, $q = f(y) - y$ rezultă că $f(x + np) = x + (n + 1)p$, $f(y + nq) = y + (n + 1)q$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Trebuie ca $|f(x + np) - f(y + nq)| \leqslant |x + np - y - nq|$, adică $|x - y + (n + 1)(p - q)| \leqslant |x - y + n(p - q)|$.

Pentru n suficient de mare, obţinem $x - y + (n + 1)(p - q) \leqslant x - y + n(p - q)$ adică $p \leqslant q$, o contradicţie care ne arată că $f(x) - x = f(y) - y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, adică $f(x) - x = f(0) - 0 \overset{\text{not}}{=} a$.

Subiectul 2. Fie $ABCD$ tetraedrul. Este cunoscută relaţia

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

Fie a măsura unghiului dintre muchiile opuse. Obţinem

$$\cos a \cdot (\pm AB \cdot CD \pm AC \cdot BD \pm AD \cdot BC) = 0,$$

cu o anumită alegere a semnelor $+, -$.

Dacă avem $\cos a \neq 0$, atunci $\pm AB \cdot CD \pm AC \cdot BD \pm AD \cdot BC = 0$, şi deducem că unul din numerele $AB \cdot CD$, $AC \cdot BD$, $AD \cdot BC$ este egal cu suma celorlalte două. Aceasta contrazice inegalitatea Ptolemeu.

Prin urmare, $\cos a = 0$, adică muchiile opuse sunt perpendiculare. Se arată uşor că în acest caz, $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

Cum din ipoteză $AB = CD$, $AC = BD$ şi $AD = BC$, rezultă că toate cele şase muchii au aceeaşi lungime, aşadar $ABCD$ este regulat.

Soluţie alternativă:

Se demonstrează că $2|\cos a| \cdot AB \cdot CD = |AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2|$.

Notând cu x, y, z lungimile muchiilor, obţinem

$$\frac{|x^2 - y^2|}{z^2} = \frac{|y^2 - z^2|}{x^2} = \frac{|z^2 - x^2|}{y^2}$$