CLASA A VIII-A

Subiectul 1. Din inegalitatea $2(a^2+b^2) \geqslant (a+b)^2$ rezultă $2n^3 \geqslant n^4$, adică $n \leqslant 2$. Se constată că n este $0, 1$ sau 2 deoarece: pentru $n=0$, considerăm $a=b=0$, pentru $n=1$, luăm $a=1$, $b=0$, iar pentru $n=2$, alegem $a=b=2$.

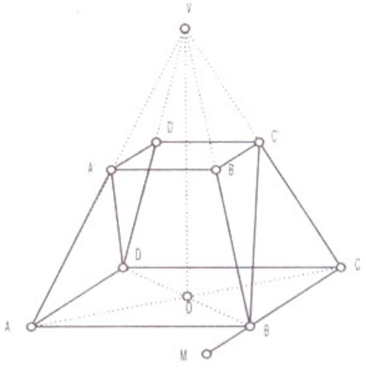
Subiectul 2. Soluţiile sunt $(0,0,0,2^{1002})$ şi $(2^{1001},2^{1001},2^{1001},2^{1001})$.

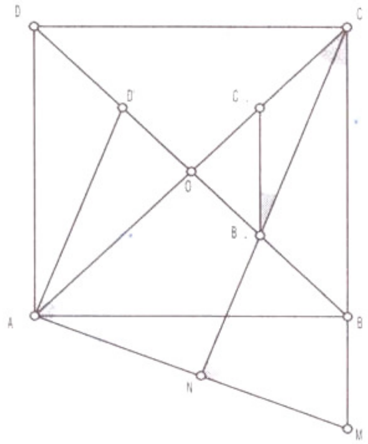
Intr-adevăr, fie (x,y,z,t) o soluţie. Observăm că dacă a este impar atunci $a=4n\pm 1$ şi a^2 dă restul 1 la împărţirea cu 8, deci ecuaţia nu poate avea soluţii în care cel puţin o componentă este impară.

Astfel $x=2x_1$, $y=2y_1$, $z=2z_1$, $t=2t_1$, unde $0\leqslant x_1 \leqslant y_1 \leqslant z_1 \leqslant t_1$ sunt numere întregi şi $x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2=2^{2002}$. Reluând raţionamentul precedent obţinem $x_1=2x_2$, $y_1=2y_2$, $z_1=2z_2$, $t_1=2t_2$, unde $0\leqslant x_2\leqslant y_2\leqslant z_2\leqslant t_2$ sunt numere întregi şi $x_2^2+y_2^2+z_2^2+t_2^2=2^{2002}$.

Continuând pe aceeaşi cale rezultă în cele din urmă $x=2^{2001}a$, $y=2^{2001}b$, $z=2^{2001}c$, $t=2^{2001}d$, unde $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$ sunt numere întregi şi $a^2+b^2+c^2+d^2=4$. Concluzia anunţată rezultă acum imediat.

Subiectul 3. a) Diagonalele BC' şi DA' se află în planele perpendiculare pe (ABC) şi paralele care trec prin punctele B şi respectiv D. Diagonalele CD' şi AB' se află în planele perpendiculare pe (ABC) şi paralele care trec prin punctele C şi respectiv A.





Ducând printr-un punct oarecare din spaţiu paralele la diagonalele BC', CD', DA' şi respectiv AB' se obţine o piramidă patrulateră regulată care are secţiunea diagonală triunghi dreptunghic isoscel, deci congruent cu "jumătate" din pătratul de bază.

Rezultă că laterale ale acestei piramide sunt congruente cu muchiile bazei. Înseamnă că feţele laterale ale piramidei sunt triunghiuri echilaterale. Rezulta că $m(\widehat{DA', AB'}) = 60°$.

b) Fie B_1C_1 proiecţia segmentului $B'C'$ pe planul (ABC) şi D_1 proiecţia punctului D' pe planul (ABC). Atunci

$$CB_1 || AD_1. \tag{1}$$

Triunghiurile B_1C_1C şi ABC_1 sunt isoscele cu $B_1C_1 = CC_1$ şi $AB = AC_1$, deci $B_1C_1 + BC = AC$.

Fie $M \in (CB\,(B \in (CM))$ astfel încât $BM = B_1C_1 = B'C'$ şi N mijlocul lui AM. Rezultă că $MB'C'B$ este paralelogram, deci $MB' = BC''$, dar $MB' = AM$ ($\triangle AMB'$ echilateral).

În $\triangle ACM$ rezultă $CN \perp AM$, şi din (1) $D_1A \perp AM$. Deducem că dreapta AM este perpendiculară pe planele $(CB'B_1)$ şi respectiv $(AD'D_1)$ deci segmentul AN va fi congruent cu perpendiculara comună a diagonalelor CB' şi AD' şi $AN = \frac{AM}{2} = \frac{BC'}{2}$.

Subiectul 4. Împărţim cubul în 12^3 cuburi de latură $\frac{1}{2}$. Centrele celor 1001 cuburi unitate se află la o distanţă de cel puţin $\frac{1}{2}$ faţă de feţele cubului iniţial. Prin urmare ele nu se pot găsi în interiorul cuburilor de latură $\frac{1}{2}$ ce au o faţă pe una din feţele cubului dat. Rezultă că cele 1001 centre se află în cele 1000 de cuburi de latură $\frac{1}{2}$ interioare cubului dat. Atunci două din centrele cuburilor unitate se află în interiorul sau pe feţele unui cub de latură $\frac{1}{2}$, de unde rezultă concluzia.

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Cum $x+y|xf(x)+yf(y)$ şi $x+y|xf(y)+yf(y)$ rezultă că $x+y|x(f(y)-f(x))$.

Pentru $y=x+1$ obţinem $2x+1|x(f(x+1)-f(x))$ şi cum $(2x+1,x)=1$, rezultă că $2x+1|f(x+1)-f(x)$.

In particular, rezulta că $f(x+1)-f(x)\geqslant 2x+1$, $\forall x\in\overline{1,9}$, deci

$$\sum_{x=1}^{9}(f(x+1)-f(x))\geqslant\sum_{x=1}^{9}(2x+1).$$

Rezultă că $f(10)\geqslant f(1)+99\geqslant 100$ deci $f(10)=100$ şi $f(1)=1$.

Din $f(x+1)-f(x)=2x+1$, $\forall x\in\overline{1,9}$, obţinem $f(x)=x^2$.

Subiectul 2. Cum ecuaţiile $x^2+kx+k-1=0$, $k=\overline{2,n}$ şi $2x^2+4x+2=0$, $x^2+4x+4=0$ au proprietatea din enunţ rezultă că $P(n)>n$.

Dacă f este o funcţie cu proprietatea din enunţ, atunci $f(x)=a(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)$ cu $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{Z}$, a, $a(\alpha_1+\alpha_2)$, $a\alpha_1\alpha_2\in\{1,2,\dots,n\}$.

In particular, avem $\alpha_2\leqslant\dfrac{n}{a\alpha_1}$. Obţinem

$$P(n)\leqslant\sum_{\substack{1\leqslant\alpha_1\leqslant n\\1\leqslant a\leqslant n}}\frac{n}{a\alpha_1}=n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right)^2.$$

Cum $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}<\sqrt{n}$ pentru orice $n\geqslant 5$ (inducţie după n), iar $P(4)=5$ rezultă că $P(n)<n^2$.

Subiectul 3. Din asemănările:

$$\Delta HMP\sim\Delta HB'N,\quad \Delta HNQ\sim\Delta HC'M,\quad \Delta HBC'\sim\Delta HCB'.$$