

## OLIMPIADĂ NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ - SOLUȚII

### CLASA A VII-A

**Subiectul 1.** a) Din  $BE \parallel CD$  rezultă  $\frac{PE}{PD} = \frac{BE}{CD}$  iar din  $DF \parallel BC$  obținem  $\frac{QF}{QB} = \frac{FD}{BC}$ . Atunci  $\frac{PE}{PD} + \frac{QF}{QB} = \frac{BE}{CD} + \frac{FD}{BC} = 1$ .

b) Din  $FD \parallel BC$  rezultă  $\frac{FQ}{QB} = \frac{FD}{BC} = \frac{EA}{AB}$ . Teorema lui Thales atrage  $EF \parallel AQ$ .

Din  $BE \parallel CD$  rezultă  $\frac{PE}{PD} = \frac{BE}{CD} = \frac{AF}{AD}$ . Conform teoremei lui Thales avem  $EF \parallel AP$ .

Conform axiomei lui Euclid rezultă că punctele  $P, A, Q$  sunt coliniare.

**Subiectul 2.** a) Din  $a+b > c$  rezultă  $a+b+2\sqrt{ab} > c$ . De aici  $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > c$  sau  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c}$ . Analog pentru celelalte laturi.

b) Relația  $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} \leq a + b + c$  este echivalentă cu  $2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ac} \leq 2a + 2b + 2c$ , sau  $(a - 2\sqrt{ab} + b) + (a - 2\sqrt{ac} + c) + (b - 2\sqrt{bc} + c) \geq 0$ , adică  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \geq 0$ , de unde rezultă concluzia.

Deoarece  $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$  sunt laturile unui triunghi avem relațiile:

$$\sqrt{a} < \sqrt{b} + \sqrt{c}, \quad \sqrt{b} < \sqrt{a} + \sqrt{c}, \quad \sqrt{c} < \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Înmulțim cele 3 relații cu  $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ , respectiv cu  $\sqrt{c}$ . După înmulțire adunăm relațiile și obținem  $a + b + c < 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ac}$ .

**Subiectul 3.** a) Fie  $P \in AC, Q \in BD$ . Triunghiurile  $EPA$  și  $DCA$  sunt asemenea. Obținem

$$(1) \quad \frac{EP}{DC} = \frac{AE}{AD}.$$

Triunghiurile  $FQB$  și  $CDB$  sunt asemenea. Obținem

$$(2) \quad \frac{QF}{DC} = \frac{BF}{BC}.$$

Din teorema lui Thales rezultă că  $\frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC}$  și din (1) și (2) obținem  $\frac{EP}{DC} = \frac{QF}{DC}$ , deci  $EP = QF$ .

b) Deoarece  $m(\widehat{AOQ}) = m(\widehat{AEQ}) = 90^\circ$ , rezultă că patrulaterul  $AEOQ$  este inscripțibil, deci  $m(\widehat{EQA}) = m(\widehat{EOA}) = 45^\circ$ . Rezultă că triunghiul  $EAQ$  este isoscel cu

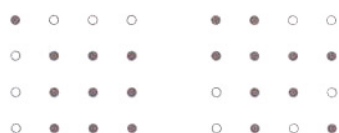
$$(3) \quad AE = EQ.$$

Patrulaterul  $DEPO$  este inscripțibil deoarece  $m(\widehat{DEP}) = m(\widehat{DOP}) = 90^\circ$ . Rezultă că  $m(\widehat{DPE}) = m(\widehat{DOE}) = 45^\circ$ . Deci triunghiul  $DEP$  este isoscel cu

$$(4) \quad DE = EP.$$

Dar  $EP = QF$ . Din (3) și (4) rezultă că  $EF = EP + PF = ED + EA = AD$

**Subiectul 4.** a) Oricare dintre următoarele două configurații respectă cerința:



b) Presupunem că se pot alege 7 puncte astfel încât să nu se formeze triunghiuri isoscele cu vârfurile în aceste puncte. Distingem două cazuri:

1) Toate punctele alese sunt pe laturi. Împărțim cele 12 puncte în trei mulțimi ce reprezintă vârfurile a trei pătrate astfel:



Observăm că nu putem alege trei puncte ce au același simbol. În concluzie obținem cel mult 6 puncte.

2) Există cel puțin un punct interior ales. Împărțim celelalte 15 puncte în 5 submulțimi, astfel:



Se observă că din punctele marcate cu  $\circ, \otimes, \diamond$  putem alege doar un punct, iar din cele marcate cu  $*$ , putem alege 2 puncte. În total sunt cel mult 6 puncte, de unde rezultă concluzia și în acest caz.