OLIMPIADĂ NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ - SOLUŢII

CLASA A VII-A

Subiectul 1. a) Din $BE||CD$ rezultă $\frac{PE}{PD} = \frac{BE}{CD}$ iar din $DF||BC$ obţinem $\frac{QF}{QB} = \frac{FD}{BC}$. Atunci $\frac{PE}{PD} + \frac{QF}{QB} = \frac{BE}{CD} + \frac{FD}{BC} = 1$.

b) Din $FD||BC$ rezultă $\frac{FQ}{QB} = \frac{FD}{BC} = \frac{EA}{AB}$. Teorema lui Thales atrage $EF||AQ$.

Din $BE||CD$ rezultă $\frac{PE}{PD} = \frac{BE}{CD} = \frac{AF}{AD}$. Conform teoremei lui Thales avem $EF||AP$.

Conform axiomei lui Euclid rezultă că punctele P, A, Q sunt coliniare.

Subiectul 2. a) Din $a+b > c$ rezultă $a+b+2\sqrt{ab} > c$. De aici $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > c$ sau $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c}$. Analog pentru celelalte laturi.

b) Relaţia $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} \leqslant a + b + c$ este echivalentă cu $2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ac} \leqslant 2a + 2b + 2c$, sau $(a - 2\sqrt{ab} + b) + (a - 2\sqrt{ac} + c) + (b - 2\sqrt{bc} + c) \geqslant 0$, adică $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \geqslant 0$, de unde rezultă concluzia.

Deoarece $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ sunt laturile unui triunghi avem relaţiile:

$$\sqrt{a} < \sqrt{b} + \sqrt{c}, \quad \sqrt{b} < \sqrt{a} + \sqrt{c}, \quad \sqrt{c} < \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Înmulţim cele 3 relaţii cu $\sqrt{a}, \sqrt{b}$, respectiv cu $\sqrt{c}$. După înmulţire adunăm relaţiile şi obţinem $a + b + c < 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ac}$.

Subiectul 3. a) Fie $P \in AC$, $Q \in BD$. Triunghiurile EPA şi DCA sunt asemenea. Obţinem

$$\frac{EP}{DC} = \frac{AE}{AD}. \tag{1}$$

Triunghiurile FQB şi CDB sunt asemenea. Obţinem

$$\frac{QF}{DC} = \frac{BF}{BC}. \tag{2}$$

Din teorema lui Thales rezultă că $\frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC}$ şi din (1) şi (2) obţinem $\frac{EP}{DC} = \frac{QF}{DC}$, deci $EP = QF$.

b) Deoarece $m(\widehat{AOQ}) = m(\widehat{AEQ}) = 90°$, rezultă că patrulaterul $AEOQ$ este inscriptibil, deci $m(\widehat{EQA}) = m(\widehat{EOA}) = 45°$. Rezultă că triunghiul EAQ este isoscel cu

$$AE = EQ. \tag{3}$$

Patrulaterul $DEPO$ este inscriptibil deoarece $m(\widehat{DEP}) = m(\widehat{DOP}) = 90°$. Rezultă că $m(\widehat{DPE}) = m(\widehat{DOE}) = 45°$. Deci triunghiul DEP este isoscel cu

$$DE = EP. \tag{4}$$

Dar $EP = QF$. Din (3) şi (4) rezultă că $EF = EP + PF = ED + EA = AD$

Subiectul 4. a) Oricare dintre următoarele două configurații respectă cerința:

$$\begin{array}{cccc} \bullet & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \bullet & \bullet \\ \circ & \bullet & \bullet & \bullet \\ \circ & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \circ & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \circ & \bullet & \bullet & \circ \\ \circ & \bullet & \circ & \bullet \end{array}$$

b) Presupunem că se pot alege 7 puncte astfel încât să nu se formeze triunghiuri isoscele cu vârfurile în aceste puncte. Distingem două cazuri:

1) Toate punctele alese sunt pe laturi. Împărțim cele 12 puncte în trei mulțimi ce reprezintă vârfurile a trei pătrate astfel:

$$\begin{array}{cccc} \circ & \diamond & + & \circ \\ + & \bullet & \bullet & \diamond \\ \diamond & \bullet & \bullet & + \\ \circ & + & \diamond & \circ \end{array}$$

Observăm că nu putem alege trei puncte ce au acelaşi simbol. În concluzie obținem cel mult 6 puncte.

2) Există cel puțin un punct interior ales. Împărțim celelalte 15 puncte în 5 submulțimi, astfel:

$$\begin{array}{cccc} * & * & * & \circ \\ * & \bullet & \diamond & \otimes \\ * & \diamond & \diamond & \circ \\ \circ & \otimes & \circ & \otimes \end{array}$$

Se observă că din punctele marcate cu $\circ$, $\otimes$, $\diamond$ putem alege doar un punct, iar din cele marcate cu $*$, putem alege 2 puncte. În total sunt cel mult 6 puncte, de unde rezultă concluzia şi în acest caz.