Soluţia va fi unică deoarece dacă presupunem Că $x_1 < x_2$ sunt soluţii, avem $0 = f_a(x_1) + x_1 = f_a(x_2) + x_2$, deci $0 \leqslant f_a(x_2) - f_a(x_1) = x_1 - x_2 < 0$, absurd.

Aşadar,soluţia unică x_a determină, în mod unic funcţia g, cu $g(a) = x + a$.

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Notăm $f(1) = a$, $f(\mathrm{i}) = b$. Cum $f(z + w) = f(z) + f(w)$, rezultă că pentru orice numere raţionale x, y,

$$f(x) = ax, \quad f(\mathrm{i}y) = by$$

şi de aici

$$f(x + \mathrm{i}y) = f(x) + f(\mathrm{i}y) = ax + by, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{Q}.$$

Fie acum $z = x + \mathrm{i}y$, cu $x, y \in \mathbb{R}$. Dacă $(x_n)_{n\geqslant 1}$, $(y_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{Q}$ sunt şiruri convergente la x, respectiv y, atunci

$$\begin{aligned}|f(x + \mathrm{i}y) - f(x_n + \mathrm{i}y_n)| &= |f[(x - x_n) + \mathrm{i}(y - y_n)]|\\ &\leqslant \lambda \cdot |(x - x_n) + \mathrm{i}(y - y_n)| = \lambda\sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2},\end{aligned}$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x + \mathrm{i}y) - f(x_n + \mathrm{i}y_n)| = 0$.

Cum $|f(x+\mathrm{i}y)-ax-by| \leqslant |f(x+\mathrm{i}y)-f(x_n+\mathrm{i}y_n)|+|a|\,|x-x_n|+|b|\,|y-y_n|$, pentru orice $n \geqslant 1$, rezultă că

$$f(x + \mathrm{i}y) = ax + by \quad \text{pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Dacă $z = x + \mathrm{i}y$, atunci

$$f(z) = a \cdot \frac{z + \overline{z}}{2} + b \cdot \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}} = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2\mathrm{i}}\right)z + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2\mathrm{i}}\right)\overline{z}$$

Subiectul 2. (a) Fie $h \in H \setminus \{e\}$. Există $h_1 \in H$ astfel încât $xhx^{-1} = yh_1y^{-1}$, deci $h = x^{-1}yh_1(x^{-1}y)^{-1} \in H \cap H^{x^{-1}y}$. Din ipoteză rezultă că $x^{-1}y \in H$.

Invers, dacă $h \in H$, atunci $yhy^{-1} = x((x^{-1}y)h(x^{-1}y)^{-1})x^{-1} \in H^x$, deci $H^y \subseteq H^x$. Cum $y^{-1}x = (x^{-1}y)^{-1} \in H$, în mod analog rezultă că $H^x \subseteq H^y$.

(b) Fie $x, y \in G$ cu $H^x \neq H^y$ şi $z = xhx^{-1} = yh'y^{-1} \in H^x \cap H^y$. Cum $x^{-1}y \in G \setminus H$, rezultă că $h = x^{-1}yh'(x^{-1}y)^{-1} \in H \cap H^{x^{-1}y} = \{e\}$, deci $z = e$. Deci $H^x \cap H^y = \{e\}$.

Fie $\mathcal{H} = \{H^x \mid x \in G\}$ şi funcţia $f : G \to \mathcal{H}$, $f(x) = H^x$. Cum $f(x) = f(y)$ dacă şi numai dacă $H^x = H^y$, dacă şi numai dacă $x^{-1}y \in H$, dacă şi numai dacă $y \in xH = \{xh \mid h \in H\}$, rezultă că elementele lui G au, n câte n, aceeaşi imagine prin f, deci $\mathcal{H}$ are $k = m/n$ elemente.

Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sunt elemente ale lui G astfel încât

$$\mathcal{H} = \{H^{x_1}, H^{x_2}, \ldots, H^{x_k}\},$$

atunci, cum $H^{x_i} \cap H^{x_j} = \{e\}$ pentru $i \neq j$, rezultă că

$$\Big|\bigcup_{x \in G} H^x\Big| = \Big|\bigcup_{i=1}^{k} H^{x_i}\Big| = k(n-1) + 1 = m - \frac{m}{n} + 1.$$

Remarcă: Grupul S_3 al permutărilor de ordin 3 şi subgrupul generat de transpoziţia (12) satisfac condiţiile din enunţul problemei.

Subiectul 3. Definim funcţia $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ prin

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x \sqrt{f(t)}\mathrm{d}t.$$

Aplicând inegalitatea lui Cauchy, rezultă

$$g(x) \leqslant \frac{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \sqrt{x}}{\sqrt{x}},$$

de unde rezultă că g este mărginită. Folosind din nou inegalitatea Cauchy, putem scrie

$$g(2x) = \frac{1}{\sqrt{2}} g(x) + \frac{\int_x^{2x} \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{2x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} g(x) + \frac{\left(\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \sqrt{x}}{\sqrt{2x}}.$$

Cum din ipoteză rezultă imediat $\lim\limits_{x\to\infty} \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, trecând la limite superioare, avem

$$\limsup_{x\to\infty} g(x) = \limsup_{x\to\infty} g(2x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \limsup_{x\to\infty} g(x)$$

de unde

$$\limsup_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$

Variantă: Fie $l = \lim\limits_{x\to\infty} \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$, astfel încît $\left|\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - l\right| < \dfrac{\varepsilon^2}{8}$, pentru orice $x \geqslant \delta_\varepsilon$. Atunci, pentru un astfel de x, avem, conform inegalităţii Cauchy–Buniakowski–Schwarz, că

$$\Big(\int_{\delta_\varepsilon}^x \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t\Big)^2 \leqslant \Big(\int_{\delta_\varepsilon}^x f(t)\,\mathrm{d}t\Big)\Big(\int_{\delta_\varepsilon}^x 1\,\mathrm{d}t\Big) = (x - \delta_\varepsilon) \int_{\delta_\varepsilon}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant x\Big(\Big(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - l\Big) + \Big(l - \int_0^{\delta_\varepsilon} f(t)\,\mathrm{d}t\Big)\Big) \leqslant x\Big(\frac{\varepsilon^2}{8} + \frac{\varepsilon^2}{8}\Big) = x\frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Prin urmare, pentru $x \geqslant \delta_\varepsilon$, avem

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{\delta_\varepsilon}^{x} \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

Pe de altă parte, deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\delta_\varepsilon} \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t = 0$, există $\delta'_\varepsilon > 0$, astfel încât, pentru orice $x \geqslant \delta'_\varepsilon$, avem

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\delta_\varepsilon} \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

Din (1) şi (2), prin adunare, obţinem că, pentru orice $x \geqslant \max(\delta_\varepsilon, \delta'_\varepsilon)$, avem

$$0 \leqslant \frac{\int_0^x \sqrt{f(t)}\mathrm{d}t}{\sqrt{x}} < \varepsilon,$$

adică concluzia.

Subiectul 4. Demonstrăm că (a) implică (b). Deoarece A este corp, rezultă că $x^{2^n+1} = x$ pentru orice $x \in A$, deci $2^n + 1 \in M$. Dacă $t \in M$ atunci polinomul $f = X^t - X \in A[X]$ are $2^n + 1$ rădăcini în A, deci $t \geqslant 2^n + 1$, de unde rezultă că $\min M = 2^n + 1$.

Demonstrăm că (b) implică (a). Presupunem că A nu este corp. Dacă $a \in U(A)$ atunci $a^{2^n} = 1$. Fie s ordinul lui a în $U(A)$; rezultă că $s = 2^k$ cu $k \leqslant n$. Pentru $k = n$ rezultă că A este corp, fals, deci $k \leqslant n - 1$. Rezultă că $a^{2^{n-1}} = 1$ deci $x^{2^{n-1}+1} = x$ pentru orice $x \in U(A)$

Fie $b \in A^* \setminus U(A)$. Dacă există $p \in \mathbb{N}^*$ cu $b^p \neq 0$ şi $b^{p+1} = 0$ atunci pentru $c = b^p$ avem $c^2 = 0$, deci $c = c^{2^n+1} = 0$, fals.

Rezultă că $b, b^2, \ldots, b^{2^n} \in A \setminus \{0, 1\}$, deci există $1 \leqslant i < j \leqslant 2^n$ cu $b^i = b^j$, echivalent cu $b^i(b^{j-i} - 1) = 0$. Obţinem $b(b^{j-i} - 1) = b^{2^n+1-i} \cdot b^i(b^{j-i} - 1) = 0$

Dacă $j - i \geqslant 2^{n-1}$ atunci $b^j = b^{2^n+1+i-1} = b^{2^n+i}$, deci $b^j(b^{2^n-(j-i)} - 1) = 0$, de unde $b(b^{2^n-(j-i)} - 1) = 0$. Cum $2^n - (j - i) \leqslant 2^{n-1}$, putem presupune că există $1 \leqslant m \leqslant 2^{n-1}$ cu $b(b^m - 1) = 0$. Deoarece polinomul $X^{2^{n-1}} + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$ şi $m \leqslant 2^{n-1}$ rezultă că $(X^m - 1, X^{2^{n-1}} + 1) = 1$ în $\mathbb{Q}[X]$, deci există $u, v \in \mathbb{Z}[X]$ cu

$$(X^m - 1)u + (X^{2^{n-1}} + 1)v = 2,$$

deci $(b^m - 1)u(b) + (b^{2^{n-1}} + 1)v(b) = 2$. Prin amplificare cu $b(b^{2^{n-1}} - 1)$ rezultă că $2b(b^{2^{n-1}} - 1) = 0$. Cum caracteristica inelului este impară, obţinem că $2 \in U(A)$, deci $x^{2^{n-1}+1} = x$, pentru orice $x \in A^* \setminus U(A)$.

Obţinem că $x^{2^{n-1}+1} = x$ pentru orice $x \in A$, deci $2^{n-1} + 1 \in M$. Cum $2 \leqslant 2^{n-1} + 1 < 2^n + 1$, se contrazice minimalitatea lui $2^n + 1$.