(a) Demonstraţi că f este continuă.

(b) Demonstraţi că există o funcţie $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, unic determinată, astfel încât

$$f(x + g(x)) = f(g(x)) - g(x)$$

pentru orice $x \geqslant 0$.

Dan Schwarz, Bucureşti

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Demonstraţi că morfismele de grup $f : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}, +)$ pentru care există λ real pozitiv, astfel încât $|f(z)| \leqslant \lambda|z|$ oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$, sunt de forma

$$f(z) = \alpha z + \beta\overline{z}, \quad \text{unde } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Cristinel Mortici, Târgovişte

Subiectul 2. Fie G un grup cu m elemente şi H un subgrup propriu al său cu n elemente. Pentru fiecare $x \in G$ notăm

$$H^x = \{xhx^{-1} \mid h \in H\}$$

şi presupunem că $H^x \cap H = \{e\}$, oricare ar fi $x \in G \setminus H$.

(a) Demonstraţi că $H^x = H^y$ dacă şi numai dacă $x^{-1}y \in H$.

(b) Determinaţi numărul de elemente ale mulţimii $\bigcup\limits_{x \in G} H^x$ în funcţie de m şi n.

Călin Popescu, Bucureşti

Subiectul 3. Fie $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$ o funcţie continuă astfel încât $\lim\limits_{x \to \infty} \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$ există şi este finită. Demonstraţi că

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x \sqrt{f(t)}\mathrm{d}t = 0.$$

Radu Miculescu, Bucureşti

Subiectul 4. Fie A un inel cu $2^n + 1$ elemente, unde n este un număr natural nenul şi $M = \{k \mid k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2, x^k = x, \text{ pentru orice } x \in A\}$.

Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) A este corp;

(b) M este nevidă şi cel mai mic element al său este egal cu $2^n + 1$.

Marian Andronache, Bucureşti